د . عبدالكاظم ماجـود

# دراسة في النظرية الاهتزازية

ديوان المطبوعات الجامعية
الجزائر

## المقدمة:

في وقتنا المعاصر أصبحت الأفكار حول الجمل والأنظمه الاهتزازيه التي تبدو لأول وهلة وكأنها لا تشابه الظواهر الطبيعه المختلفه ( الكهرومغناطيسيه ، الكيمياء ، البايولوجيا ، . . . . . الخ ) طبيعيه ومقبوله ، ليس فقط من قبل الباحثين العلميين ، بل وحتى من قبل تلاميذ مدارس الأمس .

في الواقع وجوابا على سؤال : ما هو الهزاز التوافقي ، يقدم كثير من المهتمين في وقت واحد بهيئة امثله النواس والدائره الكهربائيه ، المتكونه من مكثفه وملف.

وحتى يومنا هذا ليس من السهولة دائما ربط الظواهر الاهتزازيه والتاثيرات المشاهده في حالات ليست نادره ، مع المعطيات الأوليه الأساسيه. لذلك الآن ، كما يبدو لي ، ظهرت ضروره ملحه لكتاب علمي ، تعرض فيه النظريه الاهتزازيه المعاصره ، أمام القارئ ظواهرها وتاثيراتها ، المكتشفه في مختلف التطبيقات . من الضروري الاشاره الى أن النظريه الاهتزازيه تهتم بالدرجة الاولى :- بالصفات العامة للعمليات الاهتزازيه وليس بالسلوك التفصيلي للجمل والأنظمة الفيزيائية المرتبط بظهور الطبيعة الجوهريه لهذه الانظمة ( فيزيائية ، بايولوجيه . . . . .الخ )، اعتماداً على تحليل النموذج المدروس وأخذاً بمبدأ الانطلاق من العام الى الخاص، تصيغ النظريه

الاهتزازية هذه الصفات العامه في الانظمة الحقيقية، محتوى هذه النظرية يكمن في كونها تساعد على تحديد العلاقة بين ما يمس النظام وبين امكانياته الاهتزازيه في حالة هذه أو تلك من التأثيرات.

استخدام النظريه الاهتزازيه في كل حالة ملموسة يفترض تبسيطاً محددا يقترب الى المثالية للنظام الحقيقي – بناء نموذج مبسط ووصفه يتوافق مع المعادلات الرياضية التي تكون في العادة تفاضلية أو متحولات او مصفوفات.

المثالية المستخدمه لنفس النظام الواحد يمكن أن تكون مختلفه اعتمادا على، حول بحث اية ظاهرة يجري الحديث، أي أن النموذج او الموديل يجب ان يتوافق ليس فقط مع النظام، بل ومع الظاهرة ايضا. على سبيل المثال عندما يجري الحديث فقط حول شروط أرجحة أراجيح الاطفال عند التغيير الدوري لاطوالها، يمكن أن يكون النموذج بسيط للغاية – هزاز خطي بتردد متغير. لكن عندما يكون من الضروري تحديد شروط استقرار – Stability الاهتزازات، هياكلها .... الخ، حينذاك يصبح من اللازم انجاز نموذج، آخذين بالحسبان (على أقل تقدير) اعتماد تردد الاهتزازات على سعاتها. بهذا الشكل نأتي الى نموذج الهزاز اللاخطي ذو القياس المتغير دوريا.

مرة أخرى نشير: على اساس التصورات المتراكمة للنظريه الاهتزازية يمكن ربط هذه أو تلك من الظواهر في الانظمة الملموسة مع طبيعة هذه الانظمة، في

الحقيقة لا يعني ذلك حل المشكلة ، على سبيل المثال عند ما يدور الحديث حول انتقال أو اعادة انتاج طاقة احدى الاهتزازات في أخرى لنظام لا خطيته ضعيفه ، مثل ذبذبات ( اهتزازات) البندول على النابض يمكن القول مباشرة ، أن مثل هذا التحول في الطاقة ممكن فقط بتلك الحالة ، عندما تتحقق شروط محددة للتناغم Resonance بين الترددات الخاصة للأنظمة الثنائية .

من وجهة النظر الأكثر شمولية يبدو أن معظم ظواهر عالمنا لاخطية وأن اللاخطيه صفة حتمية في أي نظام يتغير ببطئ مع الزمن . بحث المشاكل اللاخطية يسترعي الآن اهتماما كبيرا ليس فقط من قبل الميكانيكيين والفيزيائيين بل وحتى البايولوجيين والكيميائيين والاقتصاديين ... الخ . لكننا في كتابنا هذا عنينا بشكل رئيسي بالظواهر والانظمة الخطية ، متخذين أساساً لعملنا خبرة سنوات أربع في تدريس هذا الموضوع لطلبة الجامعة .

فبالنسبة للنظرية الاهتزازية التي تقدم دراسة فيها يعني الثقل المعلق بنهاية نابض والدائرة الكهربائية الاهتزازية كليهما يعنيان موضوع بحث واحد وكليهما يكتبا بنفس المعادلات التفاضلية المعروفة ويوصفا بنفس الفضاء الطوري الواحد . هذا التشابه بين ذبذبات الثقل على النابض و بين ذبذبات الشحنه أو التيار في الدائرة الكهربائيه امتد عميقا بحيث أصبح وسيلة معتادة للبحث بأيدي الفيزيائيين بغض النظر عن

أن هاتين الظاهرتين نفسيهما تنتسبان الى مجالين مختلفين. ما قيل يتفق مع محتوى الفصول الاربعة الاولى لهذا الكتاب ، حيث بحثت صفات وخصائص الانظمة الخطية مثل المزاز الخطي – النموذج الاساسي للنظريه الخطيه للاهتزازات .

معادلة حركة المزاز الخطي التي تصف ذبذباته الحرة ، تمتلك الهيئه

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

( انظر المعادلة ( 2.23)) .

المزاز الخطي هو مثال خاص لكنه هام جدا بالنسبة للأنظمة الديناميكيه الخطية.

المعادلة اعلاه لاتتضمن الزمن ، هذا يعني أن النظام الموصوف بها لايعاني تأثير قوى متغيرة ومقاييسه ثابتة مع الزمن (نظاما مستقلا). أما اذا أثرت على النظام او الجملة قوة دورية خارجية $f(t) = f_0 \cos \omega t$ فمعادلة حركته هي بالهيئة

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

( انظر المعادلة ( 2.29)) .

حيث تكمن هنا ظاهرة الرنين او التناغم في النمو الحاد لسعة الذبذبات المستقامة ( الذبذبات الاضطرارية او المجبرة ) التي تبدأ عند اقتراب تردد التأثير التوافقي الخارجي $\omega$ من التردد الخاص $\omega_0$ للمزاز ( بشكل عام الى التردد $\omega_0$ لاحدى الذبذبات الخاصة للنظام المحلل ) .

اذا كان النظام ليس بسيطاً ، بل يظهر بعض درجات

للحريه ، حينذاك يصبح ممكنا ظهور تاثير آخر مثل الرنين الداخلي Internal resonance بين الانظمة الثنائية ، حيث يتم تبادل الطاقة . في الحالة العامة - تظهر في الانظمة بدرجتي حرية تأثيرات كثيرة خصوصا بالنسبة للأنظمة المعقدة. مثال ذلك النواسين او البندولين المرتبطين ( البندول المركب) هما في الغالب بندولان رياضيان طوليهما l1 او l2 بكتل متكافئة $m_1 = m_2 = m$

موجودان في مجال الجاذبية . حركة مثل هذا النظام المحافظ بدرجتي حرية في التقريب الخطي وبأستخدام لاغرانج توصف بنظام معادلتين تفاضليتين خطيتين من الدرجة الثانيه ومتجانستين

$$\ddot{\varphi}_1 + \nu_1 \varphi_1 - \alpha_1 \varphi_2 = 0 ,$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \nu_2 \varphi_2 - \alpha_2 \varphi_2 = 0 .$$

(انظر المعادلة ( 3 . 8 )).

عندما يمتلك النظام $n$ من درجات الحرية فمعنى ذلك ان حركته تتخذ ب $n$ من الاحداثيات المستقله او المستنتجة $q_1 ، q_2 ، \ldots ، q_n$ والتي يمكن تصوّرها كأزاحات لبعض نقاط النظام الميكانيكي أو لشحنات الدوائر الكهربائيه . لوصف حركة هذا النظام نستخدم معادلات لاغرانج

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_s} + \frac{\partial U}{\partial x_s} = 0$$

التي نحصل منها على $n$ من المعادلات التفاضلية الخطية والتي يمكن تحليلها بأستخدام أشكال المصفوفات

(أو الماتركس Matrixes) التي يقود حسابها الى المعادلة الماتركسيه (أنظر المعادلة (4.7) .

بهذا الشكل يمكن تصوّر أي نظام خطي محافظ بعدة درجات للحرية بهيئة طاقم $n$ من الهزازات المستقلة. فيما يخص تحديد الهياكل الخاصة والترددات الخاصه فقد فصّلنا تناول الموضوع تطبيقياً وبالامثلة المختارة.

في الفصل الخامس تناولنا الاهتزازات الكهرميكانيكيه التي تتحقق في بعض الانظمه الماديه وتكون مرافقة بتحول متبادل لهيئة طاقيه معيّنه في أخرى.

الانظمه التي يظهر فيها هذا النوع من الاهتزازات تسمى مبدلات وتُمثل نفسها انظمه مرتبطه .

كذلك بحثنا في هذا الفصل، المماثله الكهروميكانيكيه، التي تشغل مكاناً هاماً في دراسة الاهتزازات الميكانيكيه والكهربائيه للهزازات المشترّطَه بوجود التماثُل بين الظواهر الميكانيكيه و الكهربائيه .

الفصل السادس من هذا الكتاب خصص لدراسة الانظمة اللّاخطّيه البسيطه ومن خلالها بالطبع جرى التعرف على الذبذبات اللاخطيه . لكن في مجال كتاب واحد لا يمكن التعرف على عرض تفصيلي لنظرية الاهتزازات المعاصرة خصوصا اللاخطيه ، لكنني آأمل ان يكون وسيلة مساعدة لطلبة الفيزياء في الجامعات والمعاهد العليا ، يستخدم كمقدمة في هذا المجال الجذاب للغايه من علم الفيزياء .

د . عبد الكاظم ماجود

جامعة سطيف الجزائر

1985

# الفصل الأول

# الفصل الاول

## الحركات الاهتزازيه ومعادلاتها الرياضية

### §1 . جوهر الحركة الاهتزازيه

تسمى العمليات التي تختلف بهذه الدرجة أو تلك من التكرار بالاهتزازات أو الذبذبات . وخصائص مثل هذا التكرار يظهرها على سبيل المثال ، رقاص الساعه ، اهتزازات الاوتار ، الجهد بين صفائح المكثفه في اجهزة الراديو ، . . . الخ .

اعتمادا على الطبيعة الفيزيائيه للعمليات المتكرره ، يمكن تمييز الاهتزازات التاليه : اهتزازات ميكانيكيه ، اهتزازات كهرومغناطيسيه ، اهتزازات كهروميكانيكيه ، . . . . . الخ

تنتشر الاهتزازات في الطبيعه كظاهرة وفي التكنولوجيا استعمالا بصورة واسعه وتلعب في كثير من الحالات ادواراً سلبيه . مثال ذلك اهتزازات الجسور الناشئه بسبب الدفع الذي تكتسبه عند مرور القطارات عليها او صفاً من الجنود السائرين في نسق معين . كذلك هناك اهتزازات أخرى لها ادواراً سلبية أيضا . مثل اهتزازات أجسام السفن واجنحة الطائرات. جميع هذه العمليات يمكن أن تقود الى نتائج ضاره .

في الحالات المماثله تكمن المهمه في تلافي ظهور مثل هذه الاهتزازت أو بشكل عام يجب أن تؤخذ احتياطات لكي لاتبلغ الاهتزازات مقاييساً خطيره . من الجانب الآخر تدخل العمليات الاهتزازيه في صلب

بناء مختلف مجالات التكنولوجيا الحديثه . مثل التكنولوجيا الراديويه وغيرها . بالاستناد على طبيعة التأثير المسلط على الجملة أو النظام يمكن تمييز الاهتزازات الخاصه عن الاهتزازات الاضطراريه ، الاتوماتيكيه و الاهتزازات القياسيه .

الاهتزازات الخاصه : هي تلك الاهتزازات التي ينجزها النظام القائم بذاته بعد دفعه أو ازاحته عن موضع استقراره ثم تركه حراً لحاله .

مثال ذلك ذبذبات النواس ( المتكون من كتله صغيره وخيط مهمل الوزن موجود ضمن مجال الجاذبيه الارضيه ) المتسببه من ازاحة الكتله الصغيره ( قد تكون كره من البلاستك ) جانبا وتركها طليقة.

أما الذبذبات الاضطراريه ، فهي تلك التي تصبح خلالها العمليات الاهتزازيه للاجسام المهتزه خاضعه لتأثير قوه خارجيه دوريه . مثال ذلك ، اهتزازات الجسور عند مرور الناس عليها مشيا على الاقدام.

الاهتزازات الاتوماتيكيه تشابه بدورها هي الاخرى الاهتزازات الاضطراريه ، حيث تكون مصحوبة بتأثير قوه خارجيه على النظام المهتز ولكن اللحظة الزمنيه التي يتحقق فيها تأثير القوه الخارجيه تتحدد من قبل النظام المهتز نفسه ، أي أن النظام نفسه ينظم التأثير الخارجي . مثال الانظمة الاتوماتيكيه : هو الساعات التي يحصل فيها النواس دفعا على حساب طاقة الثقل المرفوع أو النابض المبروم ( السلك الحلزوني الذي جرى لويه ) ، اضافة الى ذلك

تحدث هذه الدفعات دوريا في لحظات مرور النواس خلال وضع الاستقرار .

في الذبذبات القياسيه وعلى حساب التاثير الخارجي يحدث تغيير دوري لاي مقياس من مقاييس النظام ، مثل طول الخيط المعلقه به الكره البلاستيكيه التي تنجز الذبذبات .

ابسط انواع الذبذبات هي الذبذبات التوافقيه ، اي تلك الذبذبات التي تتغير فيها الكميه المهتزه ( مثل انحراف النواس ) مع الزمن حسب قانون الجيب تمام . هذا النوع من الذبذبات مهم بشكل خاص للاسباب التاليه :

اولا : الذبذبات في الطبيعه و في التكنولوجيا غالبا ما تمتلك طبيعة قريبة جدا الى الذبذبات التوافقيه ، وثانيا - العمليات الدوريه بهيأة اخرى ( باعتمادية اخرى على الزمن ) يمكن ان تصور كتراكب مجموعة ذبذبات توافقيه .

2 - الذبذبات الصغيره .

نبحث نظاما ميكانيكيا يمكن ان يحدد وضعه بمساعدة كمية واحدة والتي نرمزلها عبر × . في مثل هذه الحالات يقال ان النظام يمتلك درجة حرية واحدة . الكمية × التي تحدد وضع النظام يمكن أن تكون زاوية محسوبة من بعض المستويات ، أو مسافة محسوبه بامتداد منحني محدد والذي يكون في الغالب مستقيم ، خط ..... الخ .

الطاقه الكامنه للنظام ستكون دالة لمتغير واحد هو ×:

نفترض ان النظام يتمتع بوضع التوازن المستقر . في هذا الوضع تمتلك الداله $U(x)$ قيمة اصغرية . نشترط أن يحسب الاحداثي $x$ و الطاقة الكامنه $U$ من وضع التوازن . حينذاك $U(0) = 0$

نحلل الداله $U(x)$ الى سلسلة بدرجات $x$، اضافة الى ذلك نتحدد ببحث الذبذبات الصغيره، بحيث أن الدرجات العليا للمتغير $x$ يمكن اهمالها .

نستخدم معادلة ماكلورين

$$U(x) = U(0) + U'(0)x + \frac{1}{2!}U''(0)x^2 + \dots$$

(بقوة قلة $x$ تهمل الحدود الاخرى).

بقدر ما ان $U(x)$ تكون اقل مايمكن عند $x=0$، فان $U'(0)$ تساوي صفر، بينما $U''(0)$ موجبه . اضافة الى ذلك، من الشرط : $U(0) = 0$ . ندخل التعبير :

$$U''(0) = k \quad (k > 0)$$

حينذاك

$$U(x) = 1/2\, k x^2 \qquad (1.1)$$

التعبير(1.1) يشابه التعبير الخاص بالطاقه الكامنه للسلك المشوه . وباستخدام مفهوم أن القوة التي تؤثر على الدقيقة في مجال القوى المستقر تساوي التغيير الجزئي Gradiant للطاقه الكامنه باشارة معكوسه، ومن هذا المفهوم نجد أن القوه المؤثره على النظام قيد البحث هي :

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx \qquad (1.2)$$

هذه المعادلة تعطي مسقط القوه على الاتجاه $x$ .

لاحقا سوف لانستخدم المعامل $x$ عند التعبير عن القوه ، اى نكتب المعادله (1.2) بالهيئه :

$$F = -KX .$$

المعادله (1.2) تتطابق تماما مع تعبير قوة المرونه للسلك المشوه . لذلك فالقوى من هيئة (1.2) بغض النظر عن طبيعتها تسمى قوى مرنه . من السهوله التصور ان القوى الموصوفه بالمعادله (1.2) تكون موجهه دائما باتجاه وضع التوازن . القيمه المطلقه لهذه القوه تتناسب طرديا مع مقدار انحراف النظام عن وضع التوازن . القوه التي تظهر مثل هذه الصفات يسموها احيانا بالقوه المعيده .

فعلى سبيل المثال نبحث نظاما يتكون من كرة بلاستيكيه كتلتها $m$ ، معلقه على سلك مهمل الكتله مقارنة بالكتله $m$ (لاحظ شكل 1.1 ). في وضع التوازن القوه $mg$ تعادل ، قوة المرونه : $K\Delta L_0$

$$mg = K\Delta L_0 . \qquad (1.3)$$

( $\Delta L_0$ ) – استطالة النابض . سوف نعبر عن ازاحة الكره عن وضع التوازن بالاحداثي $x$ ، اضافة الى ان المحور $X$ نوجهه باتجاه العمود الى الاسفل ، اما المحور الصفرى فنطبقه مع وضع توازن الكره .

اذا جعلنا الكره في وضع التوازن معبّراً عنها بالاحداثي $x$ ، فان استطالة النابض تصبح مساوية لـ :

$$\Delta l_0 + x$$

ومسقط القوه على محور $x$ سوف يأخذ المقدار

$$F = mg - k(\Delta l_0 + x) .$$

وبحساب الشرط ( 1.3 ) نحصل على

$$F = -kx \qquad .(1.4)$$

بهذا الشكل تمتلك محصلة قوتي الجاذبيه والمرونه في المثال المبحوث طبيعة قوة مرونه متجهه نحو المركز .

تكسب الكرة ازاحة مقدارها $x = a$ ، بعد ذلك نترك النظام لحالة . تحت تاثير القوة المرنة سوف تتحرك الكرة باتجاه وضع التوازن بكل سرعة متنامية .

وخلال ذلك فان الطاقة الكامنه للنظام سوف تتناقص (لاحظ الشكل 2 . 1) ، ولكن مقابل ذلك تظهر كل الطاقة الحركية النامية $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

(كتلة النابض مهملة) . وعندما تبلغ الكرة وضع التوازن فانها لا تتوقف بل تستمر حركتها بالقصور الذاتي . هذه الحركة سوف تتباطئ وتتوقف عندما تتحول الطاقة الحركية تماما الى طاقة كامنه ، اي عندما تصبح ازاحة الكرة ($- a$) . بعد ذلك مثل هذه العطية تظهر عند حركة الكرة بالاتجاه المعاكس . فاذا كان الاحتكاك يغيب في النظام فان طاقة النظام يجب ان تبقى ثابتة والكره سوف تتحرك بالحدود من $x = a$ الى $x = -a$ لمدة غير محدده من الزمن . معادلة قانون نيوتن الثاني بالنسبة للكرة تمتلك الهيئة التالية:

$$m\ddot{x} = -kx \qquad (1.5)$$

وبادخال التعبير :

$$\omega_0^2 = k/m \qquad (1.6)$$

تتحول المعادلة (1 . 5) الى الشكل التالي

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (1.7)$$

حيث ان $k/m > 0$ و $\omega_0$ — كمية مادية .

وهكذا ففي حالة غياب قوى الاحتكاك فان الحركة تحت تاثير القوة فوق المرنه توصف بالمعادلة التفاضلية (7 . 1) .

في أي نظام اهتزازي حقيقي توجد قوى مقاومة ، والتي تاثيرها يقود الى نقصان طاقة النظام. اذا كان النقصان في الطاقة لا يحصل على حساب شغل القوى الخارجية فان الاهتزازات سوف تخمد . في ابسط الحالات و في أكثرها شيوعا هي حالة التناسب الطردي لقوة المقاومة مع مقدار السرعة

$$F_x^* = -b\dot{x} \qquad (1 . 8)$$

هنا $b$ ـ ثابت يسمى معامل المقاومة . أما اشارة السالب ( ـ ) فتشير ان القوه $\vec{F}^*$ والسرعة $\vec{V}$ يمتلكان اتجاهين متعاكسين، وبالتالي فان مسقطيهما على محور $x$ يمتلكان اشارتين مختلفتين. معادلة قانون نيوتن الثاني عند وجود المقاومة تمتلك الهيئة التالية:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \qquad (1 . 9)$$

وبأستخدام التعبير : $2\beta = b/m$ , $\omega_0^2 = k/m$ . ( 1 . 10 ) نستطيع كتابة المعادلة ( 9 . 1 ) بالشكل : (1 . 11)

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

هذه المعادلة تصف لنا الاهتزازات المخمده للنظام .

الاهتزازات الموصوفه بالمعادلتين ( 1 . 7 ) و ( 1 . 11 ) هي اهتزازات حره (اوخاصه ) : النظام المزاح عن وضع استقراره او الذي حصل دفعا جانبيا ، ينجز ذاتيا اهتزازاته الخاصه .

الا ن نفرض أن النظام الاهتزازي يخضع لتأثير قوه توافقية خارجية تساوي :

$$f_x = f_0 \cos wt . \quad (1.12)$$

في هذه الحالة معادلة قانون نيوتن الثاني تمتلك الهيئة التالية :

$$m\ddot{x} - kx - b\dot{x} + f_0 \cos wt .$$

وبادخال التعبير ( 1 .10 ) نكتب هذه المعادلة بالشكل التالي :

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + w_0^2 x = f_0 \cos wt \quad .(1 . 13)$$

حيث

$$f_0 = f_0/m \quad .(1 . 14)$$

المعادلة ( 1 . 13 ) تصف الاهتزازات الاضطراريه .

نحن أوضحنا أن دراسة الاهتزازات المختلفة الانواع تجعلنا بتماس مباشر مع ضرورة حل المعادلة التفاضلية من النوع

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t) \quad .(1 . 15)$$

حيث $a$ و $b$ – ثوابت ، $f(t)$ – دالة ما للزمن .

المعادلة من نوع ( 1 . 15 ) تسمى معادلة تفاضلية خطية بمعاملات ثابته . في حالة المعادلة ( 1.7 )، $a=0$ و $b=w_0^2$ .

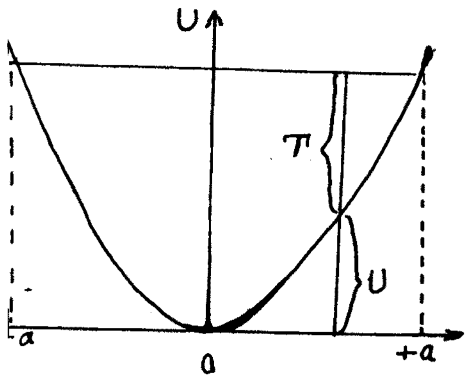
أما في حالة المعادلة (1 .11 ) فان $a=2\beta$ و $b=w_0^2$ .

في كلتا الحالتين تساوي الدالة $f(t)$ الصفر بالتطابق:

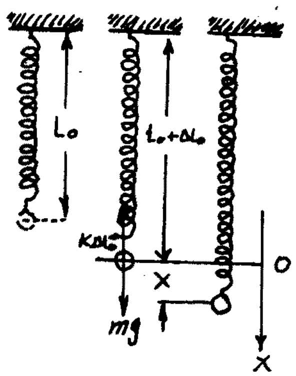
$$f(t) \equiv 0 .$$

في حالة الاهتزازات الاضطرارية $f(t) = f_0 \cos wt$

حـل المعـادلـة ( 15 . 1 ) يتسهـل بقـوة اذا انتقـلنـا الـى الاعـداد آو العقـاديـر المعقـده . ولذلـك قبـل ان نـأتي الـى البحـث التفصيلي للاهـتزازات المختلفـة الانـواع سـوف نتعـرف علـى العقـاديـر المعقد ه وعلـى طـرق حـل المعـادلات التفـاضليـه الخطـيـة بمقا دير ثـابتـه .




شـكل 2 . 1




شـكل 1 . 1

## §3. الاعداد المعقده .

العدد $\hat{z}$ من النوع: $\hat{z} = x + iy$ , (1.16) يسمى عددا معقدا ، حيث x و y اعداد حقيقيه، $i$-وحده خياليه ( $i^2 = -1$ ) . يسمى العدد X الجزء الحقيقي للعدد المعقد $\hat{Z}$ أو المادي ، وهذا رمزياً يكتب بالهيئه :

$$X = Re\,\hat{Z}$$

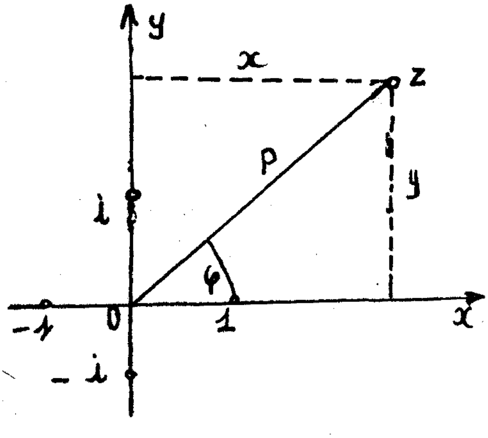
العدد y - يسمى الجزء الخيالي لـ $\hat{Z}$ ( يكتب: $y = Im\,Z$ )

العدد : $Z^* = X - iy$ . (1.17)

يسمى المرافق المعقد للعدد $X + iy$

يمكن تعويض العدد المادي X بنقطة على محور $x$.

العدد المعقد $\hat{Z}$ يمكن تعويضه بنقطه على المستوي الذي يمتلك الاحداثيين x ، y ( لاحظ الشكل 1.3).




شكل 1.3

كل نقطه من نقاط المستوي تحدد بعض الاعداد المعقده لـ $\hat{Z}$ ، وبالتالي ،فان العدد المعقد يمكن تعينه بالهيئه (1.16) بمساعدة الاحداثيات الديكارتيه X و y لنقاط ملائمه .

ولكن نفس العدد يمكن تعيَينه بمساعدة الاحداثيات

القطبيه $\rho$ ، و $\varphi$ . بين زوج الاحداثيات توجد العلاقات التاليه :

$$x = \rho \cos \varphi , \; y = \rho \sin \varphi \; .$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \; , \; \varphi = arctg(y/x) . \qquad (1.18)$$

المسافه من بداية الاحداثيات الى النقاط التي تصور العدد $\hat{z}$ تسمى القيمه المطلقه للعدد المعقد ( يرمز لها بـ $|\hat{z}|$ ) .

من الواضح أن : $\quad |\hat{z}| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1.19)$ .

العدد $\varphi$ يسمى محدد ( Argument ) العدد المعقد $z$ . وباخذ المعادله (1.18) بنظر الاعتبار يمكن ان نتصوّر العدد المعقد بالهيئه الهندسيه المثلثيه :

$$\hat{z} = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) . \qquad (1.20)$$

العددين المعقدين $z_1 = x_1 + iy_2$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ يحسبان مساوين احدهما للاخر اذا تساوت اجزائهما الماديه والخياليه كل على انفراد: $z_2 = z_1$ إذا $x_1 = x_2$ و $y_1 = y_2$ .
القيم المطلقه للعددين المعقدين المساويين لبعضهما تكون متكافئه بينما محدداتهما يمكن ان تختلف فقط بحدود تكرار $2\pi$ :

$$\rho_1 = \rho_2 \; ، \; \varphi_1 = \varphi_2 \pm 2k\pi \; . \qquad (1.21)$$

من التعبيرين (1.16) و (1.17) واضح ان في الحالة عندما $z^* = \hat{z}$ ، فان الجزء الخيالي لـ $\hat{z}$ يساوي صفر ، وهذا يعني ان العدد $\hat{z}$ يبدو انه حقيقياً أو ماديا خالصا .

بهذا الشكل فان شرط ماديه العدد يمكن ان يكتب بالهيئه (1.22) . $Z^* = \hat{Z}$ .

في الرياضيات تبرهن العلاقه

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad . (1.23)$$

والتي تسمى صيغة آيلر

نبدل في هذه المعادله $\varphi$ بـ $(-\varphi)$ ونحسب ان $\cos(-\varphi)=\cos\varphi$ بينما $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$

نحصل على العلاقه التاليه :

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi \quad . (1.24)$$

نجمع المعادلتين (1.23) و (1.24) ونحل العلاقة المحصله بالنسبة الى $\cos\varphi$ ، نحصل على

$$\cos\varphi = 1/2\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) . (1.25)$$

بمساعدة المعادله (1.23) نحسب المعادله (1.24) نحصل ان : $\sin\varphi = (1/2i)\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)$ .

وبمساعدة المعادله (1.24) يمكن ان يكتب العدد المعقد بهيئه آسيه .

$$\hat{Z} = \rho e^{i\varphi} \quad . (1.26)$$

(لاحظ المعادله (1.20)) ــ العدد المرافق المعقد بالصيغه الاسيه يمتلك الهيئه

$$Z^* = \rho e^{-i\varphi} \quad ...(1.27)$$

وفي حاله جمع الاعداد المعقده تجمع على انفراد اجزائها الحقيقيه والخياليه

$$Z_1 + Z_2 = (X_1 + X_2) + i(y_1 + y_2) \cdot (1.28)$$

اما ضرب الاعداد المعقده من الملائم ان يتحقق بأخذها بالصيغه الاسيه .

$$\hat{Z}=\hat{Z}_1 \cdot \hat{Z}_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \quad (1.29)$$

القيم المطلقه للاعداد المعقده تضرب بينما محدداتها تجمع

$$\rho = \rho_1 \cdot \rho_2 \quad \text{و} \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (1.30)$$

وبصورة مماثله تتحقق قسمة الاعداد المعقده:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \quad (1.31)$$

وآخذا بنظر الاعتبار المعادلتين (1.26)، (1.27) من السهوله آن نحصل على

$$\hat{Z} Z^* = \rho^2 \quad (1.32)$$

( مربع القيمه المطلقه للعدد المعقد يساوي حاصل ضرب هذا العدد في مرافقه المعقد ) .

## §4. المعادلات التفاضليه الخطيه .

المعادله من النوع: (1.33) $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t)$

حيث $a$ ، $b$ ثوابت ، $f(t)$ داله محدده بالزمن ، تسمى معادله خطيه من الدرجة الثانيه بمعاملات ثابتة . الثابتين $a$ و $b$ يمكن ان يكونا مساويين حتى للصفر . اذا كانت الداله $f(t)$ تساوي صفر بالتطابق( $f(t)\equiv 0$ ) ، فان المعادله تسمى متجانسه ، وفي الحاله المعاكسه ـ تسمى غير متجانسه .

المعادله المتجانسه تمتلك الهيئه:

$$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0 \qquad (1.34)$$

حل أي معادله تفاضليه من الدرجه الثانيه (أي باكبر اشتقاق ثنائي ) ، مثل $\ddot{x}$ يتضمن ثابتين اختياريين $C_1$ و $C_2$ .

وهذا يمكن ان يفهم اذا أخذنا بنظر الاعتبار أن تحديد الداله بتفاضلها الثاني يتحقق بتكاملين متكورين . في كل تكامل يظهر ثابت تكامل . نبحث كمثال المعادله: (1.35) . $\ddot{x}=0$

تكامل هذه المعادله يعطي، آن $\dot{x}=C_1$ ، تكرار التكامل يقود الى الداله (1.36) ... $x=C_1t+C_2$

من السهوله التأكد أنه عند أية مقادير للثابتين $C_1$ و $C_2$ تحقق الداله (1.36) المعادله (1.35) . باعطاء الثابتين $C_1$ و $C_2$ مقادير معينه ، نحصل على ما يسمى الحل الخاص للمعادله التفاضليه ـ على سبيل المثال ، الداله ( $5t+3$ ) تصبح احد الحلول الخاصه للمعادله (1.35) .

مجموع كل الحلول الخاصه بدون استثناء يسمى الحل العام للمعادله التفاضليه .

وعلى هذا الاساس يصبح الحل العام للمعادلة التفاضلية (1.34) بهيئة المعادلة (1.36) .

في نظرية المعادلات التفاضلية الخطيه يبرهن انه ، اذا كانتا $X_1$ و $X_2$ — يعنيان حلين خطيين مستقلين للمعادلة المتجانسه (1.34) لذلك فان الحل العام لهذه المعادلة يمكن تصوره بالهيئه

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 . \qquad (1.37)$$

حيث $C_1$ و $C_2$ — ثابتين اختياريين .

افرض ان ($X_H(t, C_1, C_2$ - يعنى حلا عاما للمعادلة غير المتجانسة (1.33) ، (الثابتين الاختياريين $C_1$ و $C_2$ يدخلان في هذا الحل بهيئة مقاييس ) ، بينما ( $X_H(t$ ) تعنى واحدا من الحلول الخاصة لنفس المعادلة ( هذا الحل لا يحتوى ثوابت اختياريه ) .

نستخدم التعبير : $X(t, C_1, C_2) = X_H(t, C_1, C_2) - X_H(t)$.

حينذاك يمكن ان نتصور الحل العام للمعادلة غير المتجانسه بالهيئه .

$$X_H(t, C_1, C_2) = X_H(t) + X(t, C_1, C_2) . \qquad (1.38)$$

الداله (1.38) باية مقادير للثابتين $C_1$ و $C_2$ تحقق المعادلة (1.33) ، وبالتالي يمكن ان تكتب العلاقة :

$$X_H(t) + \ddot{X}(t, C_1, C_2) + a\dot{X}_H(t) + a\dot{X}(t_1, C_1, C_2) + \\ + bX_H(t) + bX(t, C_1, C_2) = f(t) .$$

نرتب الحدود حسب المجاميع ، نحصل :

$$\ddot{X}(t, C_1, C_2) + a\dot{X}(t, C_1, C_2) + bX(t, C_1, C_2) + \\ + \left[\ddot{X}_H(t) + aX_H(t) + bX_H(t)\right] = f(t) . (1.39)$$

الحل الخاص $x_H(t)$ كذلك، يحقق المعادله(1.33).
لذلك فالتعبير الموجود داخل الاقواس المربعه في الطرف الايسر من العلاقه (1.39) يساوي الطرف الايمن من هذه العلاقه.
ومن ذلك ينتج ان الداله $x(t, c_1, c_2)$ يجب ان تحقق الشرط:

$$\ddot{x}(t,c_1,c_2)+a\dot{x}(t,c_1,c_2)+bx(t,c_1,c_2)=0$$

اي ان الداله $x(t, c_1, c_2)$ تمثل نفسها حلا عاما للمعادله المتجانسه (1.34). بهذا الشكل نكون قد توصلنا الى بديهيه هامه جداً:
الحل العام للمعادله غير المتجانسه يساوي مجموع الحل العام الذي يتطابق مع المعادله المتجانسه واي حل خاص للمعادله غير المتجانسه.
$X$ الحل العام للمعادله غير المتجانسه $=$ $X$ الحل العام للمعادله المتجانسه $+X$ الحل الخاص للمعادله غير المتجانسه.
(1.40).
المعادلات التفاضليه الخطيه بمعاملات ثابته يمكن حلها بمساعدة الوضع

$$x(t)=e^{\lambda t} \quad (1.41)$$

حيث $\lambda$ ـ كمية ثابتة.
اشتقاق الداله (1.41) يعطي ان

$$\dot{x}(t)=\lambda e^{\lambda t},\ \ddot{x}(t)=\lambda^2 e^{\lambda t}. \quad (1.42)$$

بتعويض المعادلتين (1.41) و (1.42) في (1.34) نصل بعد الاختصار على العامل $e^{\lambda t}$ المختلف عن الصفر، نصل الى المعادله الجبريه:

$$\lambda^2+a\lambda+b=0 \quad (1.43)$$

(1.43)

هذه المعادله تسمى بالمعادله الخصوصيه لو المميزه.
جذور هذه المعادله تمثل نفسها نفس مقادير $\lambda$،
التي فيها تحقق الداله (1.41) المعادله (1.34).
اذا كانت جذور المعادله (1.43) لاتتطابق ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)،
لذلك. فان الدالتين $e^{\lambda_1 t}$ و $e^{\lambda_2 t}$ يصبحان دالتين
خطيتين مستقلتين، وبالتالي فان الحل العام للمعادله
(1.34) طبقا ل (1.37) يمكن ان يكتب بالهيئه.

$$X = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} . \quad (1.44)$$

يمكن ان نوضح انه في حالة عندما $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$، فان
الحل العام للمعادله (1.34) يبدو بالشكل التالي.

$$X = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} . \quad (1.45)$$

نفترض أن المعاملين $a$، $b$ حقيقيين، بينما الداله
الموجوده في الطرف الايمن من المعادله (1.33) معقده.
متصورين أن هذه الداله بالهيئه:
$f(t) + i\varphi(t)$، نصل الى المعادله:

$$\ddot{Z} + a\dot{Z} + bZ = f + i\varphi . (1.46)$$

(رمزنا هنا الى الداله المبحوث عنها بالحرف $Z$).
من الواضح ان حل هذه المعادله سيكون معقدا.
بكتابة الحل بالهيئة $Z(t) = X(t) + i\varphi(t)$

معوضين عنه في المعادله (1.46). نحصل في النتيجه:

$$\ddot{x} + i\ddot{y} + a\dot{x} + ai\dot{y} + bx + biy = \quad (1.47)$$

(1.47)

بالنسبة للاعداد المعقده المتساويه الاخرى تتساوى
زوجيا الاجزاء الحقيقيه والتخيليه. وبالتالي الاجزا

المعادله (1.47) الى معادلتين مستقلتين :

$$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t) \quad , \quad \ddot{y}+a\dot{y}+by=\varphi(t) \; ,$$

المعادله الاولى من هاتين المعادلتين تتطابق مع المعادله (1.33) . هذه الصفة للمعادله (1.47) تساعدنا على أن نأخذ بنظر الاعتبار مايلي :

افرض أن في المعادله (1.33) التي حُلَّت من قبلنا كان الجزء الايمن حقيقياً ، نضيف اليه داله تخيليه اختياريه ، نقود الحل الى الهيئه (1.46) . بعد ذلك نجد الحل المعقد للمعادله ثم نأخذ جزئه الحقيقي .

هذا الجزء الحقيقي سوف يمثل نفسه حلا للمعادله المبحوثه (1.33) .

## 5 §. الاهتزازات التوافقيه ( الذبذبات الهرمونه ).

نبحث الذبذبات الموسوفه بالمعادله (1.48) :

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=0 . \quad (1.48)$$

مثل هذه الاهتزازات ينجزها جسم كتلته $m$، تؤثر عليه فقط قوة مرونة $F=-kx$،
حيث معامل $x$ في هذه المعادله يمتلك المقدار (لاحظ المعادله (1.10))

$$\omega_0^2=k/m \qquad (1.49)$$

نعوض في المعادله (1.48) التعبير :

$$x=e^{\lambda t}$$

نصل الى المعادله الخصوصيه.

$$\lambda^2+\omega_0^2=0$$

هذه المعادله تمتلك جذوراً تخيليه $\lambda_1=+i\omega_0$ , $\lambda_2=-i\omega_0$

وطبقا للمعادله (1.44) يصبح الحل العام للمعادله (1.48) بالهيئه التاليه :

$$x=C_1 e^{i\omega_0 t}+C_2 e^{-i\omega_0 t} \quad . (1.50)$$

حيث $C_1$ و $C_2$ ثابتين معقدين.

**الداله التي تصف الذبذبات المبحوثه $x(t)$ يجب أن تكون ماديه.**

ولاجل هذا الغرض من الضروري اختيار الثابتين $C_1$ و $C_2$ في المعادله (1.50) بحيث يحققا الشرط (لاحظ (1.22)).

$$C_1^* e^{-i\omega_0 t}+C_2^* e^{i\omega_0 t}=C_1 e^{i\omega_0 t}+C_2 e^{-i\omega_0 t} \quad . (1.51)$$

(هنا ساوينا التعبير (1.50) بمرافقه ) . العلاقة (1.51) سوف تتحقق اذا : $C_1 = C_2^*$ (في هذه الحاله $C_1^* = C_2$) . نتصور المعاملات التي تحقق هذا الشرط بهيئه أسيه ( لاحظ المعادله (1.17) ، رامزين للقيم المطلقه لهذين المعاملين عبر $a/2$ ولمحددا تهما بالحرف $\alpha$ :

$$C_1 = (a/2)e^{i\alpha} , C_2 = (a/2)e^{-i\alpha} . \quad (1.52)$$

نعوض هذه التعبيرات في المعادله (1.50) نحصل على

$$X = (a/2)\left(e^{i(\omega_0 t+\alpha)} + e^{-i(\omega_0 t+\alpha)}\right) = a\cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (1.53)$$

(لاحظ المعادله (1.25)) . بهذا الشكل يصبح الحل العام للمعادله (1.58) بالهيئه التاليه :

$$X = a\cos(\omega_0 t + \alpha) . \quad (1.54)$$

حيث $a$ و $\alpha$ ثوابت حره .

وهكذا تتغير الازاحة x مع الزمن حسب قانون الجيب تمام. وبالتالي فان حركة النظام الواقع تحت تاثير قوه بهيئه $F = -kx$ ، تمثل نفسها ذبذبه توافقيه .

منحني الحركه الاهتزازيه ، اي منحني الداله (1.54) موضح على الشكل 1.4 . على المحور الافقي مثّل الزمن $t$ ، وعلى المحور الشاقولي-الازاحة $X$ .

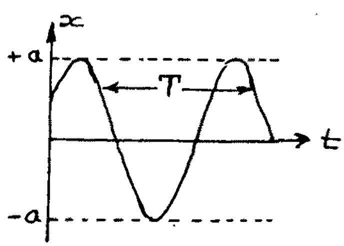
بقدرما أنّ الجيب تمام يتغير بحدود من 1 – الى 1 + ، فان مقادير x تقع بحدود من $-a$ ، الى $+a$ .

مقدار اكبر انحراف للنظام عن وضع التوازن يسمى سعة الذبذبه . السعه $a$ كميه موجبه ثابته ، يتحدد مقدارها بكمية أول انحراف أو الدفع الذي بلغه النظام عن وضع التوازن .

الكميه ( $\omega_0 t + \alpha$ ) الموجوده تحت علاقه الجيب تمام تسمى طور الذبذبه . الثابت $\alpha$ يمثل نفسه مقدار الطور في اللحظه الزمنيه $t = 0$ ويسمى بالطور الابتدائي للذبذبه .

بتغيير بداية حساب الزمن سوف تتغير $\alpha$ ايضا . بالتالي فان مقدار الطور الابتدائي يتحدد باختيار بداية حساب الزمن . بما ان مقدار x لا يتغير بأضافة او انقاص اعداد صحيحة من $2\pi$ الى او من الطور ، لذلك يمكن دائما ان يتحقق بقاء الطور الابتدائي اقل من $\pi$ . لذلك تبحث عادة فقط مقادير $\alpha$ الواقعه بحدود من $\pi-$ الى $\pi +$ .

بقدر ما أن الجيب تمام دالة دوريه بدورة $2\pi$ . لذلك فان الحالات المختلفه للنظام الذي ينجز ذبذبات توافقيه تتكرر خلال ذلك الزمن $T$ الذي يحصل الطور اثنائه على زيادة تساوي $2\pi$ ( شكل 1.4 ) .




شكل 1.4

هذا الفاصل الزمني $T$ يسمى زمن الذبذبه او الدور . ويمكن ان يتحدد من الشرط التالي:

$$[\omega_0(t+T)+\alpha] = [\omega_0 t+\alpha]+2\pi ,$$

ومن ذلك ينتج أن

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \qquad . \quad (1.55)$$

عدد الذبذبات في وحدة الزمن يسمى تردد الذبذبه $\nu$ . من الواضح ان التردد $\nu$ يرتبط بزمن الذبذبه الواحده $T$ بالعلاقه التاليه:

$$T = \frac{1}{\nu} \qquad (1.56)$$

ويعبر عن وحدة التردد بتردد تلك الذبذبه التي زمن دورتها يساوي ثانيه واحده . هذه الوحده تسمى ( هيرتس ) ويرمز لها بالرمز $Hz$ .

اما التردد $10^3 Hz$ هيرتز فيسمى كيلو هيرتزا $KHz$ وبـ $10^6 Hz$ ميكا هيرتز . من المعادله (1.55) ينتج ان

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad . \quad (1.57)$$

بهذا الشكل فان $\omega_0$ تعطي عدد الذبذبات خلال $2\pi$ من الثواني . تسمى الكميه $\omega_0$ بالتردد الزاوي او التردد الدائري ، وهو يرتبط مع التردد العادي بالعلاقه

$$\omega_0 = 2\pi\nu \qquad . \quad (1.58)$$

بتفاضل المعادله (1.54) بالنسبة للزمن نحصل على علاقه للسرعه .

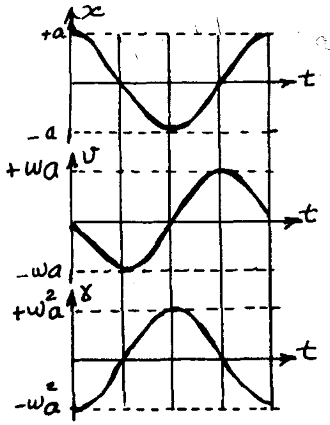
$$v=\dot{x}=-a\omega_0 \sin(\omega_0 t+\alpha)=a\omega_0 \cos(\omega_0 t+\alpha+\frac{\pi}{2}) \cdot (1.59)$$

وكما هو واضح من المعادله (1.59)،فان السرعه تتغير كذلك بالقانون التوافقي ، اضافة الى ان سعة السرعه تساوي $a\omega_0$ . من مقارنة المعادلتين(1.54) و(1.59) ينتج ان السرعه تسبق الازاحه بطور يساوي $\pi/2$ .

وبمفاضلة المعادله (1.59) مرة اخرى بالنسبة للزمن نجد تحبيرا للتسارع .

$$\gamma=\ddot{x}=-a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t+\alpha)=a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t+\alpha+\pi) \cdot (1.60)$$

وكما يتضح من المعادله (1.60) فان التسارع والازاحه يقعان في طورين متضادين . هذا يعني انه في تلك اللحظه ، عندما تبلغ الازاحه مقدارها الاعظم الموجب ، فان التسارع يبلغ اعظم كمية بمقدار سالب ، وبالعكس . على الشكل 1.5 صورت منحنيات للازاحه وللسرعه ، وللتسارع عند $\alpha=0$ . كل ذبذبه ملموسه تتصف بمقادير محدده للسعه وللطور الابتدائي .




شكل 1.5

مقادير هذه الكميات لذبذبه محدده ، يمكن ان تتحدد من الظروف الابتدائيه ، اي تتحدد بمقادير الانحراف $x_0$ والسرعه $v_0$ في اللحظه الزمنيه الابتدائيه $t_0$ . وفي الحقيقه عندما نعوض في المعادلتين (1.54) ، (1.59) ، $t=0$ ، نحصل على معادلتين :

$$x_0 = a_0 \cos\alpha \quad , \quad v_0 = -a_0 \omega_0 \sin\alpha$$

$$a_0 = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega_0^2} \quad . \quad (1.61)$$

ومن هاتين المعادلتين نجد ان

$$tg\alpha = -v_0/x_0\omega_0 \quad . \quad (1.62)$$

المعادله (1.62) تحقق مقدارين اثنين للكميه $\alpha$ ، واقعين في المدى من $-\pi$ الى $+\pi$ . من هذين المقدارين من الضروري اخذ ذلك المقدار الذي فيه نحصل على اشارات صحيحه للجيب وللجيب تمام. قوة المرونه – قوة محافظه ، لذلك فان الطاقه الكليه للذبذبه التوافقيه يجب ان تبقى ثابته .

في عملية الذبذبه يحدث تحول الطاقه الحركيه الى كامنه وبالعكس ، اضافه الى أنه في لحظة أكبر إنحراف عن وضع التوازن تتكون الطاقه الكليه فقط من الطاقه الكامنه التي تبلغ أكبر مقداراً لها

$$E = U_{max} = \frac{ka^2}{2} \quad . \quad (1.63)$$

وعند مرور النظام عبر وضع التوازن فان الطاقه الكلية $E$ تتكون فقط من الطاقه الحركيه ، التي تبلغ في هذه اللحظه قيمتها العظمى $E_{max} = T_{max}$ :

$$E = E_{c\,max} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 \quad (1.64)$$

(اشير سابقاً ان سعة السرعه تساوي $a\omega_0$ )

التعبيرين (1.63) ، (1.64) يساويان احدهما الاخر لانه وطبقا للمعادله (1.49) فان $m\omega_0^2 = k$ . الآن نوضح كيف تتغير الطاقتين الحركيه والكامنه للذبذبه التوافقيه مع الزمن. الطاقه الحركيه تساوي

$$E_c = T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{m a^2 \omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha) \quad (1.65)$$

الطاقه الكامنه يعبّر عنها بالمعادله (1.66) .

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k a^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha) \quad (1.66)$$

نجمع المعادله (1.65) مع المعادله (1.66) آخذين بنظر الاعتبار أن $m\omega_0^2 = k$ ، نحصل على معادله للطاقه الكامله :

$$E = T + U = \frac{k a^2}{2} = \frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 \quad (1.67)$$

(قارن مع المعادلتين (1.63) ، (1.64)).

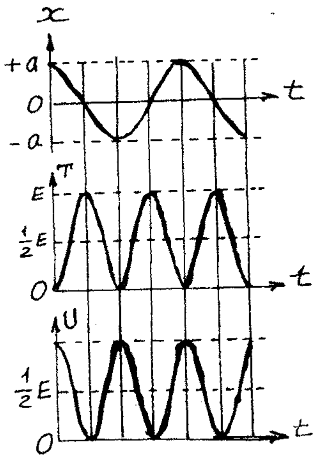
بهذا الشكل فان الطاقة الكامله للذبذبه التوافقيه تبدو في الحقيقه أنها ثابته .

باستخدام المعادلات المثلثيه المعروفه يمكن ان نعبر عن الطاقه الحركيه والطاقه الكامنه بالهيئات التاليه

$$T = E \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = E\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2(\omega_0 t + \alpha)\right] \quad (1.68)$$

$$U = E \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = E\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2(\omega_0 t + \alpha)\right] \quad (1.69)$$

حيث $E$ ـ الطاقه الكامله للنظام .




شكل 1 . 6

من هذه المعادلات واضح ان $T$ ، $U$ تتغير مع التردد $2\omega_0$ ، اي بتردد يزيد مرتين تردد الذبذبه.
على الشكل 1.6 ، صورت منحنيات $x$ ، $T$ و $U$ .
متوسط مقدار مربع الجيب ومربع الجيب تمام يساوي كما هو معروف النصف، وبالتالي فان متوسط مقدار $T$ يتطابق مع متوسط مقدار $U$ ويساوي $E/2$ .

§6 . البندول (او النواس): يعرف البندول فيزيائيا بانه كل جسم صلب ينجز تحت تاثير قوة الجاذبيه ذبذبات حول نقطة ثابته او حول اسس ثابت .

جرت العاده على تمييز بندولين : رياضي وفيزياوي.

البندول الرياضي – هو ذلك النظام المثالي المتكون من خيط مهمل الوزن وغير قابل للتمدد ربطت بنهايته السفلى كتله متمركزه في نقطة واحده ، مثال ذلك كرة منضده غير ثقيله معلقه في خيط طويل ورقيق .

سوف نصف انحراف البندول عن وضع التوازن بالزاويه $\varphi$ التي يصنعها الخيط مع الشاقول شكل 1 . 7 .

عند انحراف البندول عن وضع التوازن يُظهر عزما مدورا $N$ يساوي من حيث المقدار $mgl\sin\varphi$ .

( $m$ – الكتله ، $l$ – طول الخيط) ،

وتأثير العزم متجه دائما باتجاه وضع التوازن ، وهو بهذا يماثل في عمله عمل القوه $F_x$ (قوة المرونه المركزيه ).

ولذلك يجب ان نكتب العزم المدور $N$ والازاحه الزاويه $\varphi$ باشارتين متضادتين كما هو الحال عند كتابتنا لقوة المرونه المركزيه $F_x$ والازاحه $X$ . بالتالي تعبير العزم المدور يمتلك الهيئه التاليه:

$$N = -mgL\sin\varphi \qquad . (1.70)$$

بالنسبة للحركة الدورانيه للبندول (او النواس) نكتب معادلة الديناميكا .

نرمز للتسارع الزاوى خلال $\ddot{\varphi}$ وناخذ بنظر الاعتبار ، ان عزم عطالة

النواس يساوى $mL^2$ ، نحصل : $mL^2\ddot{\varphi} = -mgL\sin\varphi$

يمكن نقل هذه المعادلة الى الهيئه

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L}\sin\varphi = 0 \qquad . (1.71)$$

نتحدد ببحث الذبذبات الصغيره .

فى هذه الحالة يمكن وضع

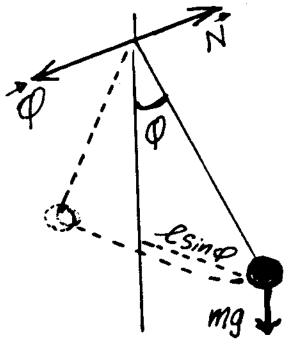
$$\sin\varphi \approx \varphi$$

اضافة الى ذلك ، ندخل التعبير

$$\frac{g}{L} = \omega_0^2 \qquad (1.72)$$

نصل الى المعادلة

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 . \qquad (1.73)$$




شكل 1.7

التى تتماثل مع المعادلة (1.48) .

حل المعادلة (1.73) يمتلك الهيئه :

$$\varphi = a\cos(\omega_0 t + \alpha) \qquad . (1.74)$$

بالتالى ، عند الذبذبات الصغيره يتغير الانحراف الزاوى للنواس الرياضى مع الزمن بقانون توافقى .

كما ينتج من المعادلة ( 1.74 ) ، فان التسارع الزاوى للنواس الرياضى يعتمد فقط على طول النواس وعلى تسارع قوة الجاذبية ولا يعتمد على كتلة النواس .

بقانون توافقي طبقا للمعادله (1.56). وبحسب (1.55) والمعادله (1.72) نحصل على المعادله المعروفه الخاصه بزمن ذبذبة البندول الرياضي

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad . \qquad (1.75)$$

نشير الى انه بحل المعادله (1.71) يمكن أن نجد المعادله التاليه الخاصة بزمن الذبذبه:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{a}{2} + \left(\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\right)^2 \sin^4\frac{a}{2} + \ldots\right\} ,$$

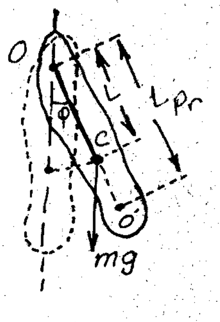
حيث $a$ ـ سعة الذبذبه ، أي اكبر زاويه يمكن ان ينحرف عليها البندول عن وضع التوازن .

البندول الفيزيائي : اذا كان لا يمكن اعتبار الجسم المتذبذب كنقطة ماديه ، حينذاك يسمى بندولا فيزيائيا. عند انحراف البندول عن وضع التوازن على زاويه $\varphi$ يظهر عزما مدورا يحاول اعادة البندول في وضع التوازن. هذا العزم يساوي

$$V = -mgL\sin\varphi , \qquad (1.76)$$

حيث $m$ ـ كتلة البندول ، $L$ ـ المسافة بين نقطة التعليق $O$ ومركز عطالة البندول $C$ (شكل 1.8).

الاشارة السالبة تمتلك نفس المعنى الوارد في المعادله (1.70).




شكل 1.8

نرمز لعزم عطالة البندول بالنسبة الى المحور خلال نقطة التعليق بالحرف $I$ ، يمكن ان نكتب

$$I\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi \,. \qquad (1.77)$$

في حالة الذبذبات الصغيره تتحول المعادله (1.77) الى المعادله المعروفه لدينا: (1.78) . $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$
في هذه الحاله عبرنا خلال $\omega_0^2$ عن القيمه التاليه : (1.79) . $\omega_0^2 = mgl/I$
من المعادلتين (1.78) ، (1.79) ينتج انه في حالة الانحراف الصغير عن وضع التوازن ينجز البندول الفيزيائي ذبذبات توافقيه ، التي ترددها يعتمد على كتلة البندول ، عزم عطالة البندول بالنسبة الى محور الدوران والمسافه بين محور الدوران ومركز العطالة .

وبالتوافق مع المعادله (1.79) يتحدد زمن ذبذبه البندول الفيزيائي . بالتعبير : (1.80)

$$T = 2\pi\sqrt{I/mgl} \,. \qquad (1.80)$$

من مقارنة المعادلتين (1.75) و (1.80) يحصل ان البندول الرياضي بطول (1.81) . . $l_{pr} = \frac{I}{ml}$
سوف يمتلك نفس زمن الذبذبه كما في حالة البندول الفيزيائي . الكمية (1.81) تسمى طولا متحولا للبندول الفيزياوي . بهذا الشكل نعرف الطول المتحول على انه طول ذلك البندول الرياضي الذي زمن ذبذبته يتطابق مع زمن ذبذبة البندول الفيزياوي المحوّل .
النقطة على المستقيم الواصل بين نقطة التعليق ومركز العطالة ، وعلى مسافة الطول المتحول

من محور الدوران ، تسمى مركز اهتزاز البندول الفيزياوي (النقطة $O'$ على الرسم 8 . 1) .

يمكن أن نوضح انه عند تعليق البندول في مركز الاهتزاز $O'$ فان الطول المتحول وبالتالي زمن الذبذبه سوف يكونان نفسهما كما في البداية .
وهذا يعني ان نقطة التعليق ومركز الاهتزاز يظهران صفات متكافئه .

عند نقل نقطة التعليق في مركز الاهتزاز فان النقطة الاولى تصبح مركزا جديدا للاهتزاز . على هذه الصفه اسس تعريف تسارع السقوط الحر بمساعدة ما يسمى بالبندول المتعاكس .

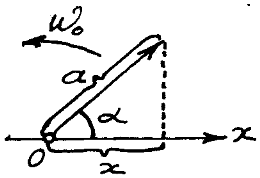
فالبندول الدوار يسمى ذلك البندول الذي يمتلك نهايتين موشوريتين موازيتين احداهما للاخرى والذي يمكن ان يعلق بهما على التوالي . بامتداد هذا البندول يمكن ان تزاح او تثبت عليه اوزان ثقيله . ازاحة الاثقال تحصل بسبب انه عند تعليق البندول على اي من الموشورين فان زمن الذبذبه يبقى متكافئا .

حينذاك تكون المسافة بين جناحي الموشورين تساوي $L_{nr}$ . وبقياس زمن ذبذبه البندول ومعرفة مسقط الطول $L_{nr}$ ، من المعادله $T=2\pi\sqrt{\frac{L_{nr}}{g}}$ نجد التسارع الحر $g$ .

§7 التخطيط او البناء الاتجاهي .

حل مجموعة الاسئلة ، خاصة تلك التي تتعلق بجمع بعض الذبذبات المتكافئه الاتجاه ( او الشئ نفسه

جمع بعض الدوال التوافقيه ) ،هذه المهمه تتسهل الى حد كبير وتصبح منظوره اذا صورت الذبذبه بيانيا بهيئة متجهات على مستوي . التخطيط المحصل بمثل هذه الطريقة يسمى بناء اتجاهي. ناخذ المحور ،الذي نرمز له بالحرف $x$ ( شكل 1.9 ). من النقطة $O$ ، الماخوذه على المحور ،نرسم متجه بطول $a$ ،يصنع مع المحور زاوية $\alpha$ . اذا جعل هذا المتجه في حالة دوران بسرعة زاويه $\omega_0$ ، فان مسقط نهاية المتجه سوف يزاح بامتداد محور $x$ بحدود من $-a$ الى $+a$ ،اضافة الى ان احداثي هذا المتجه سوف يتغير مع الزمن طبقا للقانون



شكل 1.9

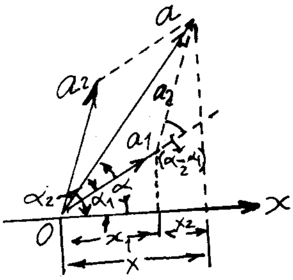
$$x = a\cos(\omega_0 t + \alpha) .$$

بالتالي ، مسقط نهاية المتجه على المحور سوف ينجز ذبذبات توافقيه بسعة ،تساوي طول المتجه وتردد زاوي يساوي السرعه الزاويه لدوران المتجه، وطور ابتدائي ، يساوي الزاويه،التي يصنعها المتجه مع المحور في بداية اللحظه الزمنية. مما تقدم ينتج ، أن الذبذبه التوافقيه يمكن أن تتحدد بمساعدة المتجه ،الذي طوله يساوي سعة الذبذبه ، بينما اتجاه المتجه يصنع مع محور $x$ زاويه ،تساوي الطور الابتدائي للذبذبه،

نبحث جمع ذبذبتين توافقيتين متكافئتي الاتجاه ، ومتكافئتي التردد . ازاحة الجسم المهتز سوف تكون مجموع الازاحتين $X_1$ و $X_2$ ، اللتين يعبر عنهما بالشكل التالي :

$$X_1 = a_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1) , \quad X_2 = a_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2) . \quad (1.31)$$

نتصور كلتا الذبذبتين بمساعدة $\vec{a}_1$ و $\vec{a}_2$ (شكل 1.10). نبني طبقا لقاعدة جمع المتجهات محصلة المتجهات $\vec{a}$ .



من السهوله ملاحظة ، بأن مسقط هذا المتجه على محور x يساوي مجموع مسقطي المتجهين $X_1$ ، $X_2$ :

$$X = X_1 + X_2$$

شكل 1.10

بالتالي ، المتجه $\vec{a}$ يمثل نفسه ذبذبه محصلة . هذا المتجه يدور بنفس تلك السرعه الزاويه $\omega_0$ ، كما لدى المتجهين $\vec{a}_1$ و $\vec{a}_2$ ، بحيث ان محصلة الحركه سوف تكون ذبذبه توافقيه بتردد $\omega_0$ ، وبسعة $a$ وطور ابتدائي $\alpha$ . من البناء يتضح ان

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos[\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)] =$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) . \quad (1.32)$$

$$tg\,\alpha = \frac{a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2}{a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2} \qquad (1.83)$$

هكذا تصور الذبذبات التوافقيه بواسطه المتجهات يعطي امكانيه تحويل عملية جمع بعض الذبذبات الى عملية جمع المتجهات . هذا التناول يمكن ان يكون مفيدا بصوره خاصه ، على سبيل المثال ، في الضوء ، حيث الذبذبات الضوئيه في بعض النقاط تتحدد كمحصله تركيب ذبذبات كثيره ، مارة في نقطه مبحوثه من اجزاء مختلفه بجبهة الموجه . المعادلتين (1.82) و (1.83) يمكن الحصول عليهما بجمع المعادلـه (1.81) واجراء التحويلات المثلثيه المطابقه .

لكن الطريقه التي استخدمناها للحصول على هذه الصيغ تختلف عن الطرق الاخرى، كونها اكثر بساطة منظوره . نعيد تحليل التعبير (1.82) بالنسبة للسعه. اذا كان فرق الطور لكلتي الذبذبتين يساوي صفر ، فان سعة الذبذبه المحصله تساوي مجموع $\alpha_1$ و $\alpha_2$ ، اذا كان فرق الطور $(\alpha_2 - \alpha_1)$ يساوي $\pi+$ او $\pi-$ ، اي ان كلتي الذبذبتين يقعان بطور متضاد ، لذلك فان سعة الذبذبة المحصله تساوي $|a_1 - a_2|$ .

اذا كان ترددا الذبذبتين $X1$ و $X2$ غير متكافئين ، فان المتجهين $\vec{a}_1$ و $\vec{a}_2$ سوف يدوران بسرعه مختلفة. في هذه الحالـه فان المتجه المحصل $\vec{a}$ يتركب بالمقدار ويدور بسرعه غير ثابته . بالتالي ، الحركه المحصله ستكون في هذه الحالـه ذبذبه غير توافقيه ، بل بعض عمليـة اهتزازيه معقده .

## 8§. النبضات

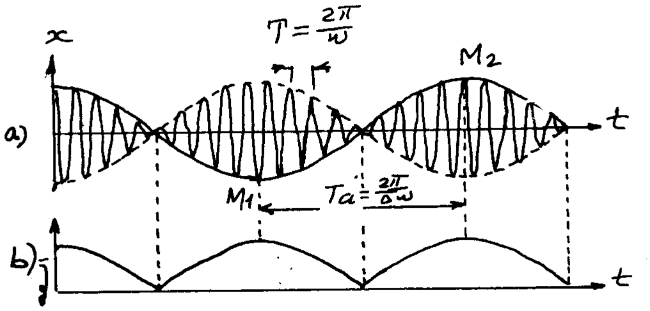
تمثل اهمية خاصة تلك الحالة ،عندما تجمع ذبذبتان توافقيتان متكافئتا الاتجاه ،مختلفتان قليلا بالتردد . الحركة المحصلة عند هذه الظروف يمكن النظر اليها كذبذبة توافقية بسعةالطاقم مثل هذه الذبذبة تسمى النبضات

نرمز لتردد احدى الذبذبتين بالحروف $\omega$ ، ولتردد الثانية عبر $\omega + \Delta\omega$ . من شروط الحالة المبحوثة ان $\Delta\omega \ll \omega$ . سعتى كلتا الذبذبتين يفترض ان تكونا متكافئتين وتساوى $a$ . لكي لا تتعقد الصيغ بشكل غير ملائم ،نفرض ،ان الاطوار الابتدائية لكلتى الذبذبتين يساويان صفر . حينذاك سوف تمتلك معادلتى الذبذبتين الهيئة التالية: $X_1 = a\cos\omega t$ , $X_2 = a\cos(\omega+\Delta\omega)t$ .

بجمع هاتين المعادلتين واستخدام الصيغ المثلثية بالنسبة لمجموع الجيوب تمام ،نحصل :

$$X = X_1 + X_2 = \left(2a\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\omega t. \quad (1.84)$$

( فى المضروب الثانى نهمل الحد $\Delta\omega/2$ بالمقارنة مع $\omega$) .
بيانى الدالة (1.84) صور على الشكل (1.11).هذا البيانى



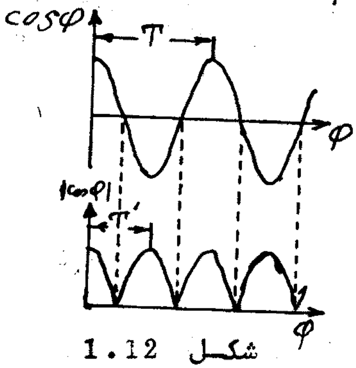

شـــكل 1.11

المضروب المحصور داخل الاقواس في المعادله (1.84) يتغير ببطئ اكثر بكثير ، من المضروب الثاني . بقوة الشرط $\Delta\omega \ll \omega$ ، خلال ذلك الزمن، الذي اثنائه ينجز المضروب $Cos\omega t$ بعض الذبذبات الكامله، خلال هذا الزمن لا يتغير تقريبا المضروب الواقع داخل الاقواس . هذا يعطينا اساسا ان نبحث الذبذبه (1.84) كذبذبه توافقيه بتردد $\omega$ ، التي سعتها تتغير ببعض قانون دوريا . تعبير هذا القانون لا يمكن ان يكون المضروب الواقع داخل الاقواس ، لان هذا المضروب يتغير بحدود من ( $-2a$ ) الى ( $+2a$ ) ، في الوقت نفسه نجد ان السعة من التحديد او التعريف هي كمية موجبه . بيانى السعة وضح على الشكل 1.11,b.

التعبير التحليلي للسعة من الواضح

انه يمتلك التعبير التالي :

$$A = \left| 2a \cos \frac{\Delta w}{2} t \right| . \quad .(1.85)$$




شكل 1.12

الداله (1.85) داله دوريه ذات تردد ، يزيد مرتين تردد التعبير الواقع تحت اشارة المطلق (لاحظ الشكل 1.12) . الذي عليه صورت منحنيات الجيب تمام وقيمته المطلقه ا،ا ي انه ، بتردد $\Delta w$ .

بهذا الشكل ، تردد السعة المعززه يسمونه تردد المتناغم — يساوي فرق ترددات الذبذبات المجموعه . نشير الى ان ، المضروب $2a\cos\frac{\Delta w}{2}t$ ليس فقط يحدد سعة ، بل ويؤثر على طور الذبذبه . هذا يظهر مثلاً ، وبدها الانحراف الذي يتوافق مع القمم المتتاليه المتجاوره للسعه ، يمتلك اشارت متضاده ( لاحظ النقطتين $M_1$ و $M_2$ على الشكل 1.11,a ) .

## ٩§. جمع ذبذبتين متعامدتين

نفرض ان النقطه الماديه يمكن ان تنجز ذبذبات كما با متداد محور $x$ ، كذلك وبنفس الوقت با متداد محور $y$ العمودى على $x$ . اذا اثيرت كلتى الذبذبتين ، فان النقطه الماديه سوف تتحرك بمسار ما ، يمكن القول بشكل عام ، انه مسار منحنى ، والذى هيئته تعتمد على فرق طور كلتى الذبذبتين . نختار بداية حساب الزمن بشكل بحيث ان الطور الابتدائى للذبذبه الاولى كان مساويا للصفر. حينذاك تكتب معادلة الذبذبه بالهيئه التاليه :

$$x = a\cos\omega t, \qquad y = b\cos(\omega t+\alpha). \quad (1.86)$$

حيث $\alpha$ فرق طور كلتى الذبذبتين . التعبيرين (1.86) يمثلان نفسهما معادلة المسار ، المحدد بهيئة مقاييسيه ، والذى يتحرك فيه الجسم ، الذى يشارك بكلتى الذبذبتين . لغرض الحصول على معادلة المسار بالهيئه العاديه ، من الضرورى استثناء الزمن من المعادله (1.86) . من المعادله الاولى ينتج ان

$$\cos\omega t = \frac{x}{a} \quad . (1.87)$$

با لتالى : $\sin\omega t = \sqrt{1-x^2/a^2}$ . (1.88)

الان نحول الجيب تمام بالمعادله الثانيه للتعبير (1.86) الى صيغه بالنسبة لجيب تمام المجموع ، معوضين خلال ذلك بدل $\cos\omega t$ و $\sin\omega t$ مقاديرهما من (1.87) و (1.88) .

فى النتيجه نحصل :

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a}\cos\alpha - \sin\alpha\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \; .$$

المعادله الاخيره وبعد تحويلات غير معقده يمكن جعلها بالهيئه

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\alpha=\sin^2\alpha \quad (1.89)$$

من الهندسة التحليليه معروف، آن المعادله (1.89) تتمثل قطعا ناقصا (الو البس)، توجه محوره بهيئة حره بالنسبة للاحداثيين $x$ و $y$. توجّه الالبس ومقدار انصاف أقطاره يعتمد بشكل معقد الى حدما على السعات $a$ و $b$ وفرق الطور $\alpha$. نبحث هيئة المسار في بعض الحالات الخاصه:

1. فرق الطور $\alpha$ يساوي صفر، في هذه الحالة تاخذ المعادله (1.89) الهيئه :

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2=0$$

من هنا تحصل معادله مستقيم: $y=\frac{b}{a}x \quad (1.90)$.

النقطة المهتزه تزاح بهذا المستقيم، اضافة الى ذلك فان بعدها عن بداية الاحداثيات يساوي $r$، حيث $r=\sqrt{x^2+y^2}$. نعوض هنا المعادله (1.86) بالنسبة لـ $x$ و $y$، آخذ ين بنظر الاعتبار، ان $\alpha=0$، نحصل:

$$r=\sqrt{a^2+b^2}\cos\omega t. \quad (1.91)$$

من المعادله (1.91) ينتج، آن محصلة الحركه تصبح ذبذبه توافقيه بامتداد المستقيم بتردد $\omega$ وسعة تساوي $\sqrt{a^2+b^2}$ (لاحظ الشكل 1.13).

2. فرق الطور $\alpha$ يساوي $\pm\pi$. المعادله (1.89) تمتلك الهيئه :

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=0,$$

من ذلك ينتج ، ان محصلة الحركة تمثل نفسها ذبذبة توافقيه بامتداد خط مستقيم (شكل 1.14)

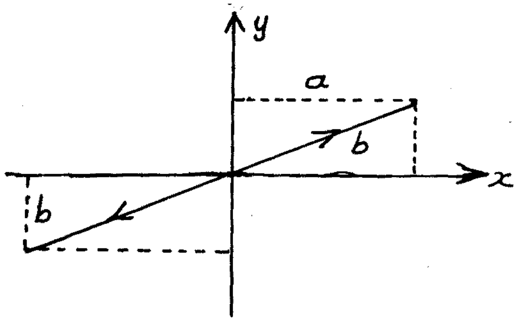
$$y = -\frac{b}{a}x \; .$$

3. عند $\alpha = \pm \pi/2$ تتحول المعادلة (1.49) في الهيئه :

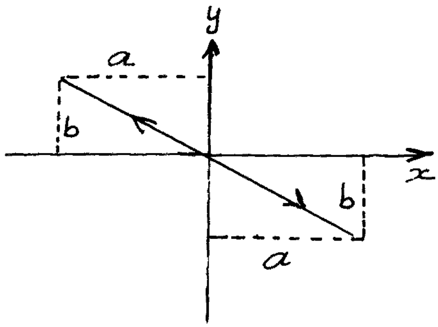
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \; . \qquad (1.92)$$

اي في معادلة الالبس، المتحول الى المحاور الاحداثية ،عدا عن ان انصاف محاور الالبس تساوي ما يتوافق معها من سعات للذبذبة .

عند تساوي السعتين $a$ و $b$ يعبر عن الالبس بدائره




شكل 1.13



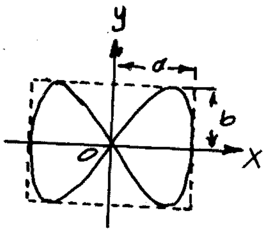

شكل 1.14

الحالتين $\alpha = +\pi/2$ و $\alpha = -\pi/2$ يختلفان باتجاه الحركة بالالبس او بالدائره . اذا كانت $\alpha = +\pi/2$ ، حينذاك يمكن ان نكتب المعادلة (1.36) بالشكل التالي

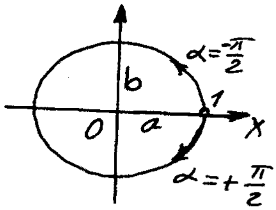
$$x = a\cos\omega t, \quad y = -b\sin\omega t \; . \qquad (1.93)$$

في اللحظه الزمنية $t = 0$ يكون الجسم موجودا في النقطة 1 (شكل 1.15) .

في اللحظات الزمنيه التاليه ينقص الاحداثي $X$ ، بينما الاحداثي $y$ يصبح سالبا . بالتالي ، تنجز الحركه باتجاه حركة عقارب الساعه .




شكل 1.16




شكل 1.15

عند $\alpha=-\pi/2$ ،فان معادلة الذبذبه تمتلك الهيئه

$$X=a\cos\omega t\ ,\ y=b\sin\omega t\ . \qquad (1.94)$$

من ذلك يمكن استنتاج ،أن الحركه تحدث عكس حركة عقارب الساعه . مما قيل ينتج ،أن الحركه المنتظمه بدائره نصف قطرها $R$ وبسرعة زاويه $\omega$ يمكن أن تمثل كمجموع ذبذبتين متبادلتا التعامد :

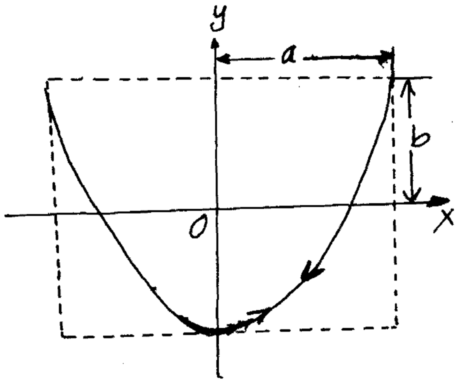
$$X=R\cos\omega t\ ,\quad y=\pm R\sin\omega t\ . \qquad (1.95)$$

(الاشارة «+» فى التعبير بالنسبة لـ $y$ تتوافق مع الحركة بعكس عقارب الساعه ، الاشاره «−» تتوافق مع الحركة باتجاه عقارب الساعة ) .

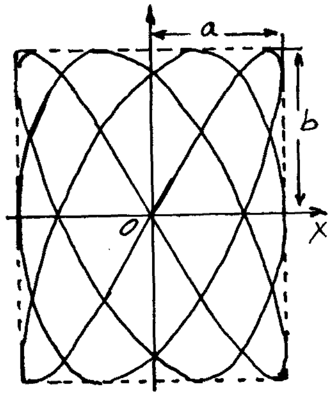
فى الحالة ، عندما ترددات الذبذبات المتعامده تختلف بمقدار صغير جدا $\Delta\omega$ ، حينذاك يمكن النظر الى هاتين الذبذبتين كذبذبات متكافئه التردد ولكن بفرق طور يتغير ببطئ . بنفس الوقت يمكن ان نتصور معادلة الذبذبة بالشكل التالى :

$$x = a\cos\omega t \ , \quad y = b\cos\left[\omega t + (\Delta\omega t + \alpha)\right] .$$

والتعبير $(\Delta\omega t + \alpha)$ يبحث باعتباره فرق الطور ، الذى يتغير ببطئ مع الزمن بقانون خطى .




شكل 1.17




شكل 1.18

محصلة الحركة فى هذه الحالة تحدث بمنحنى يتغير ببطئ ملاحظ ، والذى ياخذ بصورة متواليه اشكالا ، تجاوب على جميع قيم فرق الطور من $-\pi$ الى $+\pi$ .

اذا كان ترددا الذبذبتين المتعامدتين غير متكافئان ، فان مسار محصلة الحركه يمتلك هيئة معقدة لمنحنيات تسمى أبنية ليساج . على الشكل 1.16 عرض واحد من المسارات البسيطه المحصله عند العلاقه 1:2 للترددين وفرق الطور $\pi/2$ . معادلة الذبذبه في هذه الحاله تمتلك الهيئه

$$x = a\cos\omega t \,, \quad y = b\cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

خلال نفس الزمن ، الذي ما نزال فيه بامتداد محور $x$ ، تستطيع النقطة ان تزاح من وضع نهائي الى أخر ، بامتداد محور $y$ تستطيع هذه النقطة ان تبلغ احد الاوضاع النهائيه ، مزاحة من الوضع الصفري ، بعد ذلك الوضع النهائي الآخر ومن ثم تعود الى الوضع الصفري. عند علاقة الترددين 1:2 وفرق الطور المساوي للصفر ، فان المسار يعبر عنه بمنحني غيرمغلق ( شكل 1.17) ، الذي تتحرك فيه النقطه ذهابا وايابا . بقدر مايكون الكسر الموجه ، الذي يعبر عن علاقة ترددي الذبذبتين قريبا من الوحده الواحده ، يصبح بناء ليساج اكثر تعقيدا . على الشكل 1.18 و لغرض التوضيح عرض مثالا لعلاقة الترددين 3:4 وفرق الطور $\pi/2$ .

أسئلة وتماريس عن الفصل الاول

س1 سعة ذبذبه توافقيه لنقطة ماديه تساوي $5\,Cm$ .
كتلة النقطه $10\,g$ وطاقتها الكامله $3,1\cdot10^{-5}\,Joul$ .
اكتب معادلة الذبذبه التوافقيه لهذه النقطه
( بمعاملات عدديه ) ، اذا كان الطور الابتدائي
للذبذبه يساوي $60^{\circ}$ .

**الحل :** المعادله العامه للذبذبه التوافقيه تمتلك الهيئه :

$$X = A\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right) . \qquad (1)$$

لدينا $A = 5\,Cm$ ، $\varphi = 60^{\circ} = \frac{\pi}{3}$ .

دور الذبذبه $T$ غير معروف ، لكن يمكن ايجاده من الشرط

$$E = \frac{2\pi^2 A^2 m}{T^2} = 3,1\cdot10^{-5}\,Joul .$$

من هنا

$$T = \sqrt{\frac{2\pi^2 A^2 m}{E}} . \qquad (2)$$

لدينا $A = 5.10^{-2} M$ ، $m = 10^{-2} kg$ ،

$$E = 3{,}1 \cdot 10^{-5} \text{ Joul}$$

نعوض هذه المعطيات في (2)، نحصل $T = 4$ second.

حينذاك $\frac{2\pi t}{T} = \frac{2\pi t}{4} = \frac{\pi}{2} t$ ,

و المعادله (1) تأخذ الشيئه

$$X = 5 \sin\left(\frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{3}\right) Cm.$$

نشير الى أنه : بما أن $\sin\left(\frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{3}\right)$ كميه بدون مقياس، فلا ضرورة أن تعوض $A$ بالامتار، أما وحدات الازاحه $X$ فسوف تتطابق مع وحدات $A$.

س2 اكتب معادلة الحركه الاهتزازيه التوافقيه، اذا كان الطور الابتدائي للذبذبه يساوي:

1) $0$ , 2) $\frac{\pi}{2}$ , 3) $\pi$ , 4) $\frac{3}{2}\pi$ ,

5) $2\pi$ .

سعة الذبذبه تساوي $5 Cm$، ودورها $8$ Sec.

الحـــل :

1) $X = 5 \sin \frac{\pi t}{4}$ Cm ،

2) $X = 5 \sin \left( \frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{2} \right)$ ؛

3) $X = 5 \sin \left( \frac{\pi t}{4} + \pi \right)$ ،

4) $X = 5 \sin \left( \frac{\pi t}{4} + \frac{3\pi}{2} \right)$ ؛

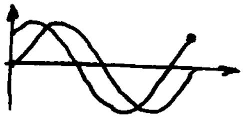
5) $X = 5 \sin \left( \frac{\pi t}{4} + 2\pi \right) = 5 \sin \frac{\pi t}{4}$ .

س3 ارسم على بياني واحد ذبذبتين توافقيتين بسعتين متكافئتين ( $A_1 = A_2 = 2$ Cm ) ودوريين متكافئين ( $T_1 = T_2 = 8$ Second )، ولكنهما يمتلكان فرقا بالطور :

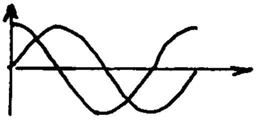
1) $\frac{\pi}{4}$ ، 2) $\frac{\pi}{2}$ ، 3) $\pi$ ، 4) $2\pi$ .

الحـل : لاحظ الشكل 1.19 .

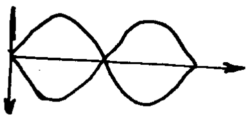
1 ) عنـدما يكـون فـرق الطـور بيـن الـذبـذبتيـن مسـاويا : $\frac{\pi}{4}$



2 ) عنـدما يكـون فـرق الطـور مسـاويـا : $\frac{\pi}{2}$



3 ) وعنـدمـا يكـون : $\pi$



4) كـلا الجيبـان يتطـابقـان .

س4 : اكتب معادلة حركة اهتزازيه توافقيه بسعة . $0,1\,M$ ودور $4\,Second$ ، وطور ابتدائي يساوي صفر .

س5 : سعة ذبذبه توافقيه تساوي $50\,mm$ ، دورها $4\,Sec$ والطور الابتدائي $\frac{\pi}{4}$ .

1) اكتب معادلة هذه الذبذبه .

2) اوجد ازاحة النقطة المهتزه عن وضع الاستقرار عند $t=0$ وعند $t=1,5\,sec$ .

3) ارسم منحني هذه الذبذبه .

س6 : اكتب معادلة الحركه الاهتزازيه التوافقيه بسعة $5\,Cm$ ، اذا انجزت في الدقيقه الواحده 150 ذبذبه بطور ابتدائي يساوي $45°$ . ارسم منحني هذه الحركه .

س7 : خلال كم من الزمن منذ بداية حركة نقطة ماديه تنجز ذبذبه توافقيه ، تزاح هذه النقطه من وضع استقرارها بمقدار نصف السعه .
اذا كان دور الذبذبه يساوي $24\,Sec$ والطور الابتدائي يساوي صفر .

**الحل :** نمتلك $X = A\,Sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$ .

حسب الشرط $X = \frac{A}{2}$ ، اضافة الى ذلك

$T = 24\ sec$ و $\varphi = 0$ .
بالتـالـي ،

$$0,5 = \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right).$$

أي أن

$$\left(\frac{\pi}{12}t\right) = 30^\circ = \frac{\pi}{6} ,$$

من هنا ينتج ان $t = 2\ sec.$

س8 : الطور الابتدائي لذبذبه توافقيه يساوي صفر خلال أي جزء من دور الذبذبه سوف تساوي سرعة نقطة ماديه نصف سرعتها العظمى ؟

س9 : خلال كم من الزمن منذ بداية الحركه ، تقطع نقطة ماديه الطريق من وضع الاستقرار الى اكبر ازاحه ممكنه ، اذا كانت هذه النقطه تنجز حركة اهتزازيه طبقا للمعادله

$$x = 7 \sin 0,5\pi t .$$

س10 : سعة ذبذبه توافقيه تساوي $5\ Cm$ ، الدور $4\ Sec$.
أوجد السرعه العظمي للنقطة المهتزه وتسارعها الاعظم.

س11 : معادلة حركة نقطة اعطيت بالهيئة

$$x = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) Cm.$$

أوجد : 1) دور الذبذبه ، 2) السرعه العظمي للنقطة،

3 ) تساويهما الاعظم .

س 12 : معادلة حركة نقطه اعطيت بالهيئة

$$x = \sin \frac{\pi}{6} t .$$

اوجد اللحظات الزمنيه التي تبلغ فيهما السرعة والتسارع قيمهما العظمى .

**الحل :** نمتلك طبقا للشرط $x = \sin \frac{\pi}{6} t .$

من هنا السرعه $v$ تساوي

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{6} \cos\left(\frac{\pi}{6} t\right) .$$

السرعه تكون اعظم ما يمكن عند الشرط

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} t\right) = 1$$

اي عند الشرط

$$\frac{\pi}{6} t = n\pi$$

حيث $n = 0, 1, 2, \ldots$

بهذا الشكل تصبح السرعه اعظم ما يمكن في اللحظات الزمنيه

$$t = 0, 6, 12 \text{ Sec}.$$

التسارع سوف يكون اعظم ما يمكن تحت الشرط

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} t\right) = 1 ,$$

اي تحت شرط ان

$$\frac{\pi}{6}t = (2n+1)\frac{\pi}{2} .$$

بهذا الشكل ، يبلغ التسارع قيمته العظمى في اللحظات الزمنيه

$$t = 3 , 9 , 15 \ Sec, \dots$$

س13: نقطة تنجز ذبذبه توافقيه . دور الذبذبه 2 Sec. ، سعتها 50 mm ، الطور الابتدائي يساوي صفر . اوجد سرعة النقطة في اللحظة الزمنيه ، عندما تصبح ازاحتها عن وضع الاستقرار مساوية لـ 25 mm .

س14: اكتب معادلة الحركه الاهتزازيه التوافقيه ، لنقطة ماديه ، اذا كان تسارعها $\gamma_{max} = 49,3 \frac{Cm}{Sec^2}$ ، دور الذبذبه $T = 2 \ Sec$ وازاحة النقطة عن وضع الاستقرار في بداية اللحظة الزمنيه تساوي 25 mm .

س15: الطور الابتدائي لذبذبه توافقيه يساوي صفر . عند ازاحة النقطه عن وضع الاستقرار بمقدار 4 Cm و 2,6 كانت سرعتها تساوي 3 Cm/sec. ، بينما عند ازاحتها بمقدار 2,8 ، كانت السرعه تساوي 2 Cm/sec .

اوجد سعة ودور هذه الذبذبه .

س 15

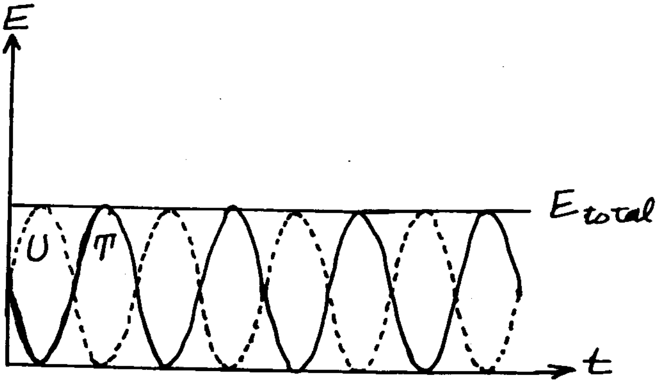
أ ) معادلة ذبذبة نقطة ماديه كتلتها $m = 16g$ ، تمتلك الهيئه :

$$X = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}\right)M.$$

ارسم منحنى الاعتماد على الزمن (بحدود دور واحد ) للطاقات الحركية ، الكامنة والكلية لهذه النقطة .

ب) حدد دور ذبذبة ثقل وزنه $P = 2,5\ N$ ( $N$ — نيوتن) معلق فى نابض ، اذا كان النابض يتمدد تحت تاثير قوة $f = 3N$ بمقدار $9\ Cm$ .

جـ حدد دور النواس الرياضى الذى طوله $\ell$ .




شكـــل 1.20

الحل: 16 س أ.

علـى الشكـل 1.20 . صـور اعتمـاد الطـاقـه الحركيـه والكامنه والكـليـه علـى الـزمـن للنقطـه ،الـتي تهـتز طبقـا للمعـادلـه المعطـاة بالسـؤال . اعطـي المنحـنـي بحـدود دور واحـد . مـن المنحـنـي يتضـح ،ان دور ذبـذبـه الطـاقـه آقـل بمـرتـين مـن دور الحـركـه الاهـتزازيـه نفسهـا .

س17 : مـا هـي العـلاقـه بـين الطـاقـة الحـركيـه والكـامنـه لنقطـه مـاديـه تنجـز ذبـذبـه تـوافقيـه ، للفـترات الـزمنيـه :

1) $t=\frac{T}{12}$ Sec ,

2) $t=\frac{T}{8}$ Sec , 3) $t=\frac{T}{6}$ .

اذا علمـت آن الطـور الابـتـدائـي للذبـذبـه يسـاوي صفـر .

س18 : مـا لعـلاقـة بـين الطـاقـتـين الحـركيـه والكـامنـه لنقطـة تنجـز ذبـذبـة تـوافقيـه ،عنـدمـا ازاحـة النقطـه عـن وضـع

الاستقرار تشكل :

(1 $x = \frac{A}{4}$ ، (2 $x = \frac{A}{2}$

(3 $x = A$ ،

حيث $A$ – سعة الذبذبه .

س19 : الطاقه الكامله لجسم، ينجز حركة اهتزازيه توافقيه تساوي $3.10^{-5}$ Joul . اكتب معادلة حركة هذا الجسم اذا كان دور الذبذبه يساوي $2\ sec.$ والطور الابتدائي $60^{\circ}$ . القوه المؤثره $F = 1,5.10^{-3}\ N$

س20 : كرة صغيرة معلقة بنهاية خيط طوله $2\ M$ ، حرفت الكره عن الشاقول بزاويه $4^{\circ}$ وشوهدت اهتزازاتها . فاذا أفترض أن الذبذبات توافقيه والحركه تنجز دون فقدان بالطاقه، أوجد سرعة الكره عند مرورها خلال وضع الاستقرار .

أفحص الحل الذي حصلت عليه، أوجد سرعة الكره عند نفس الوضع باستخدامك المعادله الميكانيكيه .

**الحل :** دور ذبذبه الكره $T = 2\pi\sqrt{L/g} = 2,8\ sec.$

سعة الذبذبه عند الانحرافات الصغيره عن وضع الاستقرار يمكن أن توجد بالصورة التاليه :

$$A = L \sin\alpha = 2\,meter\ \sin 4^{\circ} = 2 \cdot 0.0698\ meter$$

$$\cong 0,14\ M .$$

حيـنذاك تكـتب معـادلـة حـركـة الكـره هكـذا :

$$x = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = 0{,}14 \sin \frac{2\pi t}{2{,}8} M ,$$

اذا حسـب الـزمـن اعتبـارا مـن وضـع الاسـتقرار، عنـد مـرور الكـره خـلال وضـع الاستقـرار تكـون سـرعتهـا أعظـم مـا يمكـن.

بمـا ان $v = \frac{0{,}14 \cdot 2\pi}{2{,}8} \cos \frac{2\pi t}{2{,}8} M/sec.$ ، فـان

$$v_{max} = \frac{0{,}14 \cdot 2\pi}{2{,}8} M/Sec = 0{,}31 M/Sec .$$

نفـس هـذه السـرعـه نستطـيع ايجـادهـا مـن العـلاقـة الميكانيكيه

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 ,$$

حيـث $h$ الارتفـاع الـذي تبلـغـه الكـره .

مـن هـذا ينتـج $v = \sqrt{2gh}$ .

ليـس مـن الصعـوبـه مـلاحظـة ، أن

$$h = L(1 - \cos\alpha) ,$$

حيـث $L$ ـ طـول الخيـط .

حيـنذاك

$$v = \sqrt{2gL(1 - \cos\alpha)} = 0{,}31 M/Sec .$$

عند الانحرافات الكبيره لهذا النواس ( الكره المعلقه بالخيط) عن وضع الاستقرار فلن تكون ذبذبات النواس حينذاك توافقيه .

س21: بنهاية نابض شاقولي علق ثقل قوه 10 kg .
فاذا علمت أن النابض يتمدد تحت تاثير قوه مقدارها 1 kg قوه بمقدار 1،5 Cm ، حدد دور الذبذبات الشاقوليه للثقل .

س22: كيف يتغير دور الذبذبات الشاقوليه لثقل ، معلق على نابضين متكافئين ، اذا انتقلنا من الربط المتوالي للنابضين الى ربطهما المتوازي .

س23: كره صغيره من النحاس معلقه بنهاية نابض ، تنجز ذبذبات شاقوليه . كيف يتغير دور الذبذبه ، إذا ما علقت بدلها كره أخرى من الالمنيوم لها نفس نصف القطر .

س24: اناء أثقال معلق في نابض مع الاثقال . خلال هذا كان دور الذبذبات الشاقوليه يساوي 0,5 Sec .
بعد أن أضيفت الى اناء الاثقال ، أثقالا اضافيه ، اصبح دور الذبذبات الشاقوليه يساوي 0,6 Sec .
كم استطال النابض بسبب الاثقال الاضافيه .

س25: أكتب معادلة الحركه ، المحصله بنتيجة جمع حركتين اهتزازيتين توافقيتين وجهتا بصورة متكافئه بسنأ دوار متكافئه 6 8 Sec وبسعة متكافئه 0,02M .

فـرق الطـور بـين هـاتين الـذبـذبـتين يسـاوي $\pi/4$ .
الطـور الابتـدائـي لا حـدى هـاتـين الـذبـذبـتين يسـاوي صفر.

س25: أوجـد السـعه والطـور الابتـدائـي للـذبـذبـه التـوافقيـه المحصلـه مـن جمـع ذبـذبـتين مـتوجهتـا بصـورة متكـافئـه، والمعـبر عنهمـا بالمعـادلـتين

$$x_1 = 0{,}02 \sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right) M ,$$

و

$$x_2 = 0{,}03 \sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{4}\right) M.$$

س26: بنـتيجـة جمـع ذبـذبـتين تـوافقيـتين متـوجهتـا بصـوره متكافئه بسـعتين متـكافئتين ودورين متـكافئـين ، تحصـل ذبـذبـه محصلـه بنفـس الـدور وبنفـس السعـه . أوجـد فـرق طـور الـذبـذبـتين المـتراكـبتين .

س27: أوجـد السعـه والطـور الابتـدائـي للـذبـذبـه التـوافقيـه، المحصلـه مـن جمـع ذبـذبـتين ، وجهتـا بصـوره متكـافئـه، والمعـبر عنهمـا بالمعـادلـتين

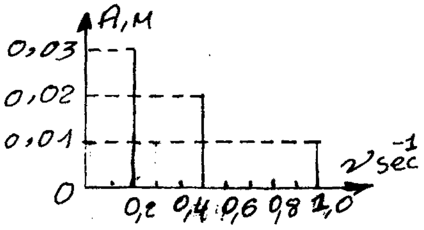
$$x_1 = 4 \sin \pi t \ Cm$$

$$x_2 = 3 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) Cm .$$

2) أكتـب معـادلـة محصـلة الـذبـذبـه

3) اعطي التخطيط الاتجاهي لجمع السعات .

س 28 : على الشكل 1 . 21



شكل 1.21

عرض طيف ذبذبه معقده .

1) استخدم معطيات هذا الرسم ، أكتب معادلة الذبذبات ، التي تكونت منها الذبذبه المعقده

2) ارسم منحني هذه الذبذبات ( آخذين ، بنظر الاعتبار ، آن فرق الطور بين هذه الذبذبات في اللحظه $t=0$ يساوي صفر ) .

3) ارسم منحني الذبذبه المحصله المعقده .

س 29 : لتكن لدينا ذبذبتان توافقيتان

$$X_1 = 3 \sin 4\pi t \ Cm$$

و

$$X_2 = 6 \sin 10\pi t \ Cm .$$

ارسم منحني هاتين الذبذبتين . اجمع بيانيا هاتين الذبذبتين وارسم منحني الذبذبه المحصله . ارسم تخطيطيا كذلك طيف الذبذبه المعقده المحصله .

س30 : لتكن لدينا ذبذبه بهيئة المعادله

$$x = A \sin 2\pi \nu_1 t , \qquad (1)$$

حيث $A$ تتغير مع الزمن طبقا للقانون

$$A = A_0 (1 + \cos 2\pi \nu_2 t) .$$

هنا $A_0 = Cons.$

اوجد من اي الذبذبات التوافقيه تتكون الذبذبه في المعادله ( 1 ) .

ارسم منحني مركبات الذبذبه المحصله بالنسبة للحاله

$$A_0 = 4\,Cm \;,\; \nu_1 = 2\,sec^{-1} ,\; \nu_2 = 1\,sec^{-1}$$

خطّط طيف الذبذبه المعقده .

س31 : أكتب معادلة الذبذبه المحصله ، الناشئه بنتيجة جمع ذبذبتان متبادلتا التعامد بترد دين متكافئين

$$\nu_1 = \nu_2 = 5\,Hz$$

وبطور ابتدائي متكافئ $\varphi_1 = \varphi_2 = 60^\circ$ .

سعة أحدى هاتان الذبذبتان تساوي

$$A_1 = 0,10\,M ,$$

سعة الاخرى

$$A_2 = 0,05\,M .$$

س32: نقطة تشارك بذبذبتين متكافئتا الدور وبطورين ابتدائيين متكافئيين .

سعتا الذبذبتان $A_1 = 3\,Cm$ , $A_2 = 4\,Cm$ .

أوجد سعة الذبذبه المحصله، اذا:

1) كانتا الذبذبتان تُنجزان باتجاه واحد،

2) الذبذبتان متبادلتا التعامد.

س33: نقطة تشارك في آن واحد بذبذبتين متعامدتين

$$x = \cos \pi t \quad , \quad y = \cos \frac{\pi t}{2} .$$

أوجد مسار حركة النقطه

س34: نقطة تساهم في نفس اللحظه الزمنيه (في آن واحد) بذبذبتين متعامدتين

$$x_1 = 2 \sin \omega t\, M$$

$$,$$

$$y = 2\cos \frac{\pi t}{2} .$$

أوجد مسار محصلة حركة النقطة .

س35: نقطة تساهم في آن واحد بذبذبتين متعامدتين

$$x = \sin \pi t \quad , \quad y = 2 \sin \left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) .$$

أوجد مسار حركة النقطة وخطط مقاييس هذا المسار البيانيه .

س 36 : نقطة تساهم في آن واحد بذبذبتين متبادلتا التعامد ( متعامدتين)

$$x = \sin \pi t$$

و

$$y = 4 \sin(\pi t + \pi).$$

أوجد مسار حركة النقطه وخطط مقاييسه البيانيه .

# الفصل الثاني

# الفصل الثاني

## الاهتزازات الحره بدرجة حريه واحده في الانظمه الخطيه .

### §1. الاهتزازات الحره بدرجة حريه واحده في الانظمه الخطيه المحافظه ( نظرية المحافظه ) .

عند بحثنا للانظمة المهتزة يجب ان نولي اهتماماً لتلك الانظمة ذات الخمود القليل في اهتزازاتها والتي فيها تشتت الطاقه خلال زمن الهزه الواحده قليل بالمقارنه مع الاحتياطي العام لطاقه النظام المرتبطه بالحركه المبحوثه . في مثل هذه الانظمه تظهر الصفات الاهتزازيه بوضوح . في التطبيق العملي نلتقي مع كثير من الانظمه ذات القدره العاليه على الاهتزاز .

يمكن ان نذكر على سبيل المثال عناصر التناغم أو الانسجام الداخليه في بناء دائرة الاستقبال الراديوية أو البناء الاهتزازي الداخلي في صناعة اشرطه الفلترات أو بناء النوابض أو التوازنات في ميكانزم الساعات . كثير من الخصائص الاهتزازيه لمثل هذه الانظمة تعتمد قليل جداً على مقدار وطبيعة الخمود اذا هو بقي في حدوده الدنيا . لذلك عند تحديد انفسنا بفاصل زمني ليس بكبير مقارنه بزمن الهزه الواحده نستطيع ان نبحث كثير من الخواص النوعيه الهامه للعمليات الاهتزازيه باهمالنا الخمود الذي يمكن ان يحصل وننظر الى النظام كنظام محافظ . ومن الواضح ان هذا الافتراض يقودنا الى بحث انظمة مثالية واستخدام النتائج المحصلة وتطبيقها على الانظمه الفيزيائيه الحقيقيه والقريبه منها .

الانظمة المحافظة: هي تلك الانظمة التي فيها احتياط الطاقة الميكانيكيه أو الكهرومغناطيسية أو كليهما معا يبقى ثابتا خلال الاهتزاز الواحد ( ذبذبة واحده). يوجد كذلك مجموعة كاملة من الانظمه الاهتزازيه التي فيها خسران الطاقة خلال زمن الهزه يعوض على حساب المصادر الداخليه للطاقه . وبهذا الشكل فان احتياطي الطاقة لايتغير من هزة الى هزة اخرى.
مثل هذه الانظمة تحمل تسمية المهتزات الاتوماتيكية.
بغض النظر عن قلة وجود الانظمة المحافظة في الطبيعة فان دراستها تساعدنا على الحصول على معلومات كثيره تسهل دراسة الانظمة المختلفة عن الانظمة المحافظه ولكنها قريبة منها .
عدد درجات الحريه للنظام يتحدد بعدد المتغيرات المستقله الضروريه لوصف حركة النظام وصفا كاملا.
وبتحديد دراستنا على الانظمه ذات درجة الحرية الواحده يجب علينا بشكل عام لغرض وصف الحركة في الانظمة المحافظه ان نبحث المعادله التفاضلية من الدرجة الثانيه

$$\ddot{X} = \Phi(X, \dot{X}) \quad (2.1)$$

لكن مثل هذه المعادله سوف تصف الحركة في الانظمه المحافظه لبعض اشكال الداله $\Phi(X, \dot{X})$ وليس في اي شكل منها .
ولغرض تبسيط البحث نبدأ بدراسة الحالة عندما

تكون المعادله التي تصف الحركه في النظام المبحوث خالية من $\dot{x}$ ، اي ان القوه المعيدة لاتعتمد على السرعه . حينذاك سيكون الشكل العام للمعادله ( 2.1 )

هو ما يلي : ( 2 . 2 ) $\ddot{x} = f(x)$ .

اضافة الى انه من الهيئة: $F(\ddot{x}, \dot{x}) = 0$ ، نستطيع دائما ان ننتقل الى الهيئة $\ddot{x} = f(x)$ ، حيث يمكننا حل هذه المعادله بالنسبة الى $\ddot{x}$ . بالنسبة للأنظمة الميكانيكيه في المعادلات التي تصفها من نوع المعادله ( 2.2 ) ، يمكن اعتبار أن المشتقة الثانية لـ $x$ تمثل قوة العطاله الناتجه .

أما الجزء الايمن من المعادله (2.2) فانه يمثل القوة الناشئه في النظام والمرتبطه فقط بوضع الكتله المبحوثه ( مثل قوة المرونه ) . وكلتا القوتان ينتسبان الى وحدات الكتله .

في الانظمه الكهربائيه التي بالنسبة لها تعتبر $x$ ( الشحنه ) هي المتغير الأساسي ، فان الجزء الايسر من المعادله ( 2.2 ) يعتمد على القوة الكهربائيه المؤثره والظاهره على الحث ، بينما الجزء الايمن يعتمد على القوه الكهربائيه المؤثره والظاهره على سعة النظام .

كذلك تنتسب الى المعادله (2.2) معادلة الهزاز التوافقي

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 . \qquad (2.3)$$

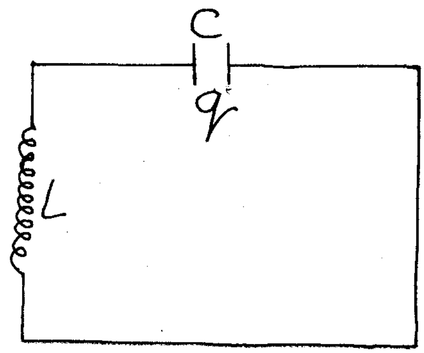
فالهزاز التوافقي والذي سبقت دراسته في الفصل الاول

يمتلك معادله تفاضليه لحركته بالاحداثيات الزاويه وضمن مجال الجاذبيه الارضيه ممثلة بالهيئة المعروفه ( الهزاز التوافقي هو كل جسم معلق بنابض او طافيا على سطح الماء او جزيء ثنائي الذرة او ذره في شبكة بلورية او شحنة $q$ مهتزة في دائرة $(LC)$ الكهربائية )

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0. \qquad (2.4)$$

اما في حالة الدائره الكهربائيه الممتزه بدون فقدان في الطاقه والموضحه على الشكل 1 . 2 ، فان معادلة الحركه المحصله من قانون كريتشوف

$$L\ddot{q} + q/C = 0.$$




شكل 2 . 1

دائره كهربائيه مهتزه .

فان عوضنا $q$ ب $X$ ، $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ،

نحصل على المعادله :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

فكل من المعادلتين (2.3) و ( 4 . 2 ) تصف عمليات الاهتزاز في انظمه محافظه .

لكن المعادله ( 3 . 2 ) هي خطيه بالنسبة للاحداثي $X$ .

وبالتالي ، فهي تصف حركة نظام خطي مهتز .

وبالعكس ، فان المعادله ( 4 . 2 ) التى تصف حركة الهزاز التوافقى بالاحداثيات القطبيه ، هذه الحركة التى تتناسب فيها القوة المرجعة التى تعيد الجملة او النظام الى وضع التوازن عندما يختل هذا التوازن طردا مع الازاحة ، التى هى الكمية الفيزياوية المتغيرة الوحيدة فى حالة بحثنا هذا (مثل الازاحة او الزاوية او الشحنة ) عن وضع التوازن . هذه المعادلة هى :

ليست خطيه بالنسبة للاحداثي $\theta$ ،أي أن القوة المعيده تتناسب طرديا مع $\sin\theta$ ،ولذلك فالنظام الموصوف بهذه المعادله ليس نظاما خطيا .

نعود الى المعادلة (2.2) معتبرين أن الدالة $f(x)$ هي ،عبارة عن داله لاخطيه جرى تكاملها بالنسبة للاحداثي $X$ .

ندخل متغير جديد هو $y=\dot{x}$ والذي يساعدنا أن نستثني $t$ من معادلة الحركه بشكل واضح ،رغم انه كالسابق ( $y=y(t)$ و $X=X(t)$

حينذاك يمكن أن نكتب $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=y\frac{dy}{dt}$

في الاحداثيات الجديده تصبح المعادله ( 2 . 2 ) بالشكل التالي :

$$y\frac{dy}{dx}=f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}f(x). \quad (2.5)$$

بتكامل هذه المعادلة نحصل على

$$\left.\begin{aligned} \int y\,dy-\int f(x)\,dx&=0 \\ \tfrac{1}{2}y^2-\int f(x)\,dx&=h \end{aligned}\right\} \quad (2.6)$$

حيث $h=Const.$

التعبير ( $-\int f(x)\,dx$ ) يعني داله كامنه تتناسب طرديا مع الطاقه الكامنه للنظام .

اما المقدار $\frac{1}{2}y^2$ فهو يمثل الطاقه الحركيه لوحدة الكتل . ولذلك تصبح المعادله ( 2.6) بالهيئه التاليه

$$\frac{1}{2}y^2+V(x)=h. \quad (2.7)$$

المعادله (2.7) هي الشرط الطبيعي للنظام المحافظ ( المعزول عن تاثير القوى الخارجيه ) والذي يمكن أن يعبر عنه بآحتياطي ثابت للطاقه .

اما بالنسبة للحالة الاكثر عموميه ، عندما تكون القوه المعيده تعتمد على السرعه فان المعادله ( 2.1 ) يمكن ان تكتب بالصوره التاليه :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\,\Phi(x, y) ; \qquad y\,dy = \Phi(x, y)\,dx ;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Phi(x,y)}{y} .$$

وفي هذه الحاله ستكتب المعادله (2.1) كمعادله تصف النظام المحافظ بشرط ان يتحقق تكامل ذات مقدار واحد لهذه المعادله :

$$F(x, y) = Const.$$

## 2§ . طريقة المستوي الطوري

بتعويض $y = \dot{x}$ يمكن ان نستخدم طريقه معروفه لدراسة سلوك النظام المبحوث ، بمساعدة المستوي الطوري ( مستوى المتغيرات $x$ و $y$ ) . كل حاله من حالات هذا النظام تتفق مع قيمتين لـ $x$ و $y$ — اي ان كل حاله تمثل بنقطه على المستوي الطوري .

سوف نسمي مثل هذه النقطه التي تتحدد احداثياتها بمقدار واحد للحاله اللحظيه للنظام — بالنقطة الواصفه او المصوره . من الواضح انه في حالة الحركه المنجزه من قبل النظام سوف يحصل تغيير لمقادير $x$ و $y$ ، وبالتالي فان النقطه المبحوثه سوف تزاح بمسار منحني غير محدد اتفق على تسميته بالمسار الطوري للحركه .

فبالنسبة للنظام المبحوث ترتبط المتغيرات $x$ و $y$ بهذا النظام بمعادلتين تفاضليتين من الرتبه الاولى .

$$\dot{x} = y . \qquad (2.8)$$

$$\dot{y} = f(x) . \qquad (2.9)$$

او يرتبط المتغيرين $x$ ، $y$ ، العائدين لنفس النظام بمعادلة واحده هي: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} f(x)$ ، والتي تكاملها يعطي معادلة المسار الطوري .

ومن الخصائص العامه للمعادلات التفاضلية ينتج ان : خلال كل نقطة من المستوى الطوري يجب ان يمر مسار طوري واحد فقط ، باستثناء تلك النقاط التي فيها $f(x)$ ، $y$ يتحولون الى الصفر في نفس الوقت. في هذه النقاط الخاصه يصبح اتجاه وعدد المسارات الطوريه غير محدد والنظام نفسه يخضع لدراسة خاصه. نلاحظ ان معادله المسار الطوري قد استثنينا منها الزمن بشكل واضح .

شكل المسار الطوري يعطي بعض المؤشرات عن الخطوات اللحظيه للعمليه المدروسه ، وبدون بحوث اضافيه لانستطيع الحصول على المتغير الاساسي $x$ كداله للزمن .

نبحث الظروف التي تظهر فيها حالة التوازن في النظام : في حالة التوازن تؤول سرعة الحركه الى الصفر والقوى المسببه لحركة النظام يجب ان تغيب اي ان

$$y = \dot{x} = 0 , \qquad \dot{y} = \ddot{x} = 0 .$$

ومن ذلك ينتج انه في حالة التوازن يجب ان تكون $y = 0$ ، $x = x_i$ .

في النقاط المطابقه لحالة التوازن $f(x_i)=0$ وبالتالي فان الداله الكامنه $V(x)$ في الحالة عندما $x=x_i$ تمتلك حداً أدنى ، وذلك لان : $y = f(x) = -\frac{d}{dx} V(x)$.

بينمـا فـي الحـالـة عنـد $x = x_i$ فإن

$$f(x_i) = \frac{d}{dx} V(x) \Big|_{x=x_i} = 0$$

النقـاط الـتي يتحـقـق فيمـا هـذا الشـرط الاخـير تسمـى نقا طاً خـاصـة مـن الـرتبـه الاولـى .

فـاذا كـانـت

$$\frac{d^n}{dx^n} V(x) \Big|_{x=x_i} = 0 \; , \; \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} V(x) \Big|_{x=x_i} \neq 0$$

حيـث $n = 1, 2, \cdots$ ، 1.2

لذلـك فـنحن نعلـك عـلاقـه مـع النقـا ط الخـاصـه مـن الـرتبـه $n$ . وبهـذا الشكـل فـان وضـع الـتوازن للنظـام يتطـابـق مـع $f(x_i) = 0$ ، $y_i = 0$ .

اي يتطـابـق مـع النقـاط الخـاصـه علـى المسـتوى الطـوري .

## 3 § . حركة الأنظمة المزاحة عن وضع توازنها الدائم

احد الاسباب التي تجعل الحركه التوافقيه البسيطه تكتسب اهميه خاصة هو انه اذا ازيح النظام عن وضع توازنه ازاحه صغيره فان الحركه الناشئه في هذه الحاله ( عند غياب الاحتكاك ) هي حركة توافقيه بسيطه . ولكي نبحث ذلك نصف الانحراف عن وضع التوازن الدائم بالاحداثي $\eta$ .

حيث $\eta$ يمكن ان تعبر عن مسافة او زاويه او اي نوع من الاحداثيات. وشرط حدوث التوازن الدائم هو ان تكون $\eta = 0$ .

في هذه الحاله تصبح طاقة الوضع ( الطاقة الكامنه ) اقل ما يمكن أما القوه او عزم الدوران فيجب ان يساوي صفر ، اى ان

$$F(\eta=0) = -\left(\frac{dU}{d\eta}\right)_{\eta=0} = 0$$

حيث $U$ ـ طاقة الوضع .

وباستعمال نشر تيلر للداله $U$ المتغيره مع $\eta$ نحصل على :

$$U(\eta) = U_0 + \left(\frac{dU}{d\eta}\right)_{\eta=0}\eta + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2U}{d\eta^2}\right)_{\eta=0}\eta^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3U}{d\eta^3}\right)_{\eta=0}\eta^3 + \dots$$

حيث يؤخذ نشر تيلر حول $\eta = 0$. باهمال الحدود المحتويه على $\eta^3$ والحدود الاعلى منها، ذلك لان $\eta$ كميه صغيره، واخذا بنظر الاعتبار ان :

$$\left(\frac{dU}{d\eta}\right)_{\eta=0} = 0 \; , \quad \left(\frac{d^2U}{d\eta^2}\right)_{\eta=0} = cst.$$

نحصل على :

$$U(\eta) = U_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{d\eta^2}\right)_{\eta=0} \eta^2$$

بمفاضلة هذه المعادله نحصل على :

$$F(\eta) = -\frac{\partial U(\eta)}{\partial \eta} = -\left(\frac{d^2U}{d\eta^2}\right)_{\eta=0} \eta \; .$$

حيث $F(\eta)$ يمكن ان تمثل قوه او عزم دوران أو ية كمية ذات فعل قوه . أما الاشاره السالبه فتعني ان القوه تحاول اعادة النظام الى وضع التوازن عند $\eta = 0$ .

بالتالي يبدو أن شرط التوازن الدائم هو :

$$\left.\frac{d^2U}{d\eta^2}\right|_{\eta=0} > 0 \; .$$

أي ان ( $F(\eta)$ ) في التعبير الاخير تعني قوه معيده . وبأستعمال قانون نيوتن الثاني تصبح معادله الحركه

$$m\ddot{\eta} = -\left(\frac{d^2U}{d\eta^2}\right)_{\eta=0} \eta \; .$$

حيث $m$ ـ كمية لها فعل الكتله .

أما الاحداثي $\eta$ فهو يصف حركة توافقيه بسيطه لنظام خطي بدرجة حريه واحده .

هذا التعبير الاخير يمكن تطبيقه على تلك الانظمة التي تمتلك دالة تفاعليه تعبر عن طاقتها الكامنه $U$.

## 4. الاهتزازات الحره بدرجة حريه واحده في الانظمة غير المحافظه .

المميزات الاساسيه للعمليات الاهتزازيه في الانظمه غير المحافظه وطرق بحثها : كما أوضحنا سابقا في الانظمه الحقيقيه يحدث دائما تشتت للطاقة، خسرانها ، انتقالها من النظام. وكنتيجة لهذا يحدث نقصان للاحتياطي العام للطاقة الاهتزازيه . عملية التشتت تعني عدم المحافظه على الطاقه، ونقصان الاحتياطي العام يشمل جميع الانظمة التي لا تمتلك وسيله لتعويض هذا النقص الطاقي . ولذلك فنحن على صح حينما ناخذ بنظر الاعتبار حساب عملية النقص للاحتياطي الاساسي لطاقة الاهتزاز، لان ذلك يساعدنا على الحصول على أجوبه تصف تماما الحركه الحقيقيه اكثر صحة من بحث الانظمه المحافظه. من الممكن الاشاره الى مجموعة خصائص العمليات الاهتزازيه التي تشترط وجود الخساره في طاقة النظام والتي تحدث بقانون محدد وهي جوهريه كما للانظمه الخطيه وللانظمه اللاخطيه .

فالى مجموعة المشاكل التي يتطلب حلها حساب النقصان في الطاقة ( الانظمه غير المحافظه ) تنتسب على سبيل المثال : تقدير السعات المتكافئه في الانظمه الخطيه أو في الانظمه ذات اللاخطيه القليله ، الشكل العام للحركه الحاصله بوجود القوى المؤثره ( القوى المجبره ) ، قانون تغير سعات الاهتزازات الحره

مع الزمن واستقراريه الحالات المختلفه . لهذه الاسباب فان الاسئله والمشاكل المشار اليهما اعلاه لاتستطيع نظرية الانظمه المحافظه المهتزه ان تعطي آجوبه صحيحه عليهما .

فأخذاً بنظر الاعتبار ماتقدم في كل حاله ملموسه يبدو واضحا ان نظرية الانظمه المحافظه المهتزه غير ناجعه . ومن الطبيعي تماما ان حساب اللا محافظه حتمي وضروري ولكنه بلا شك يعقد حل المسائل المطروحه . واذا كان بالامكان الحصول على اجوبه بواسطة نظريه الانظمه المحافظه على الاسئله المطروحه، فلا باس الاخذ بها . أما فيما يخص الخصائص العامه للانظمه التي تظهر خمودا في اهتزازاتها فان الاستنتاجات التي استخلصت من تحليل الانظمه المحافظه المعزوله يمكن ان تبدو مبدئيا غير صحيحه. بين الانظمه المحافظه وغير المحافظه توجد فوارق مبدئيه فيزياويه تظهر على اساس اختلاف سلوك الطاقه في هذه او تلك من الانظمه .

فاذا كانت هذه الفروق خلال فتره زمنيه صغيره جدا يمكن ان تظهر ضعيفه للغايه فانها خلال فتره زمنيه كبيره بمافيه الكفايه منذ بدأ العمليه سوف تكون في الانظمه الحقيقيه محسوسه ومتميزه كماً ونوعا وسوف تبدو الحركه في الانظمه غير المحافظه مختلفه عما في الانظمه المحافظه.

وبما آن الاهتزازات الحره في الانظمه المحافظه

يجب أن تتحقق وتبقى مستمره لزمن طويل ولا محدود وسعتها يجب أن تتحدد بالظروف الابتدائيه ، فان في الانظمه غير المحافظه يمكن دائما الاشاره الى الفتره الزمنيه المحدوده التي خلالها سعة الحركه بأية ظروف ابتدائيه حقيقيه ستكون اقل مما في الفتره الزمنيه السابقه .

ومما تقدم يتضح : ان الانظمة غير المحافظه المهتزة والتي لا تمتلك مصادر للطاقه تمتلك حالة استقرار واحده هي السكون . وبنفس الوقت يمكن ان تكون الظروف الابتدائيه والاحتياطي العام لطاقه النظام عاملا مسببا للخمود الحاصل للاهتزازات الحره للنظام والتي يمكن أن تتوقف تماماً في الانظمه الحقيقيه خلال فتره زمنيه كافيه .

في الوصف الرياضي للانظمه المحافظه المستقله نتعامل مع التكامل التالي

$$\Phi(x, y) = h, \quad y \equiv \dot{x}. \qquad (2.10)$$

وهذا التعبير الرياضي لحركة النظام المهتز بدرجة حريه واحده يشترط ثبوت احتياطي طاقه حركة النظام . وفي أبسط الحالات يمكن أن توصف حركة النظام المحافظ بالمعادلة التاليه :

$$\frac{1}{2} y^{2} + V(x) = h. \qquad (2.11)$$

حيث $V(x)$ - دالة كامنه تعبر بمقياس محدد عن الطاقه الكامنه للنظام.اما في الانظمة غير المحافظة

( التي تشتت الطاقه ) فان المعادله (2.10) تاخذ الشكل التالي :

$$\Phi(x, y) = W(t). \qquad (2.12)$$

حيث

$$\frac{dW}{dt} \neq 0$$

هنا الداله $W(t)$ تعبر عن المقدار اللحظي (الآني) لا حتياطي الطاقه الاهتزازيه للنظام .

وبصورة مماثله نستطيع ان نكتب الشرط العام للانظمة غير المحافظه . مما تقدم ينتج انه رغم صغر الفاصل الزمني في الفتره الزمنيه المبحوثه $\Delta t$ التي فيها $\frac{dW}{dt} \neq 0$، فان هذا النظام خلال هذا الفاصل الزمني المعطى يعتبر غير محافظ ،اضافة الى ذلك، قد ينتج انه خلال فترات زمنيه منفرده يحصل ان : $\frac{dW}{dt} = 0$ ، لذا فانه خلال هذه الفواصل الزمنيه اللحظية والمؤقته يمكن أن نعتبر النظام أو نفسر النظام كنظام محافظ والذي بالنسبة له $\frac{dW}{dt} = 0$ .

في الانظمه غير المحافظه دائما تكون $\frac{dW}{dt} < 0$ ، وهذا فيزياوياً يتطابق مع وجود الخسران في الطاقه، الذي يقود الى النقصان المستمر بأحتياطي الطاقه المرتبط بالحركه المدروسه . فاذا رمزنا الى سرعة التشتت بالداله

$$F(x, y) = -\frac{dW}{dt} \quad ,$$

فانه في الانظمه غير المحافظه يتحقق دائما

الشرط التالى : $F(x,y) > 0$ .

فى الحالات الحقيقية فان هذه الدالة تعبر عن مقدار استطاعة الخسارة فى الطاقة . بالنسبة للانظمة التى توصف فيها الحركة بواسطة معادلة الطاقة (2.12) التى يمكن كتابتها بالهيئه :

$$\frac{1}{2} y^2 + V(x) = W(t) . \qquad (2.13)$$

من السهولة ان نحصل على معادلة القوى التى تؤثر على هذه الانظمة وذلك بتفاضل المعادلة (2.13) بالنسبة الى الزمن .

نحصل على :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} y^2 + V(x)\right] = -F(x,y) \qquad (2.14)$$

$$\dot{y} - f(x) + \frac{1}{y} F(x,y) = 0$$

حيث $V(x) = -\int_0^x f(x)\, dx$ هى القوة المعيدة .

اما التعبير $\frac{1}{y} F(x,y)$ فهو يمثل مقدار قوة الاحتكاك التى خصائصها فـي مختلف الأنظمه تعتمد على حالة حركة النظام .

$$\frac{1}{y} F(x,y) = -\frac{1}{y} \frac{dW}{dt} . \qquad (2.15)$$

وهذا خاص بالانظمة غير المحافظه (المشتته للطاقه) . حينذاك تصبح المعادله (2.14) بالهيئه التاليه :

$$\dot{y} - f(x) - \frac{1}{y} \frac{dW}{dt} = 0 . \qquad (2.16)$$

حيث الحد الثاني من الطرف الايسر $(-f(x))$ يمثل القوة المعيدة .

نلاحظ ان التعبير $\left(\frac{1}{y} F(x,y)\right)$ الممثل لقوة الاحتكاك يؤول الى الصفر عندما $y = 0$ ، أي

عند غياب الحركه . وهذا يظهر من التصور الفيزيائي وبالذات من تصور أن قوة الاحتكاك والخسران في الطاقه يمكن أن يمتلك مكاناً فقط بوجود الحركة في النظام أي عند ما ( $y \neq 0$ ) . ومن ذلك ينتج أن :

في الداله $F(x,y)$، المتغير $y$ يجب أن يدخل بأس اكبر من 1. وبحساب الشرط اللازم للانظمه غير المحافظه $F(x,y) > 0$، نستطيع أن نصل الى استنتاج مفاده ان التعبير $\frac{1}{y} F(x,y)$ ، يجب ان يكون متغير الاشاره ويأخذ اشاره تطابق اشاره $y$ . اي أن اشارة $\frac{1}{y} F(x,y)$ تطابق اشارة سرعة الحركة في النظام أو التيار في الدائره الكهربائيه .

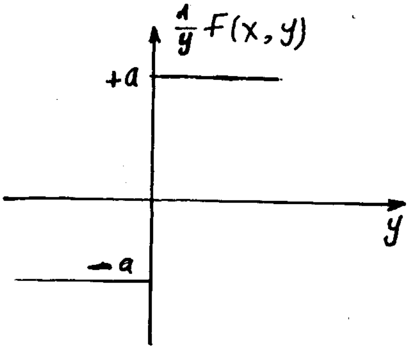
بالنسبة لكثير من الانظمة غير المحافظه تعتمد قوة الاحتكاك فقط على السرعه (أو على قوة التيار) ولا تعتمد على الاحداثيات (او الشحنه) ولكن طبيعة هذا الاعتماد يمكن ان تكون مختلفه أعتمادا على خصائص النظام والظروف التي تنجز فيها الحركه المدروسه .

فقوة الاحتكاك التي لاتعتمد على السرعة وترتبط فقط بأشارتها تحمل اسم - الاحتكاك الجاف - هذا النوع من الاحتكاك يساعد على فهم الخصائص الجوهريه للعمليات الحادثه في مجموعة حقيقيه من الانظمه الميكانيكيه . ولكن لايمكن ان نجد شبيه له وسط العمليات التي تحدث في الدوائر الكهربائيه الاهتزازيه البسيطه . خاصيه الاحتكاك الجاف يمكن ملاحظتها من الشكل التالي :

اضافة الى ان $\frac{1}{y}F(x,y) = a$

حيث $a>0$ عند $y>0$

$a<0$ عند $y<0$.




في الشكل 2.2 يلاحظ انقطاع في الداله الممثله لقوة الاحتكاك عند $y = 0$، وهذه صفه ملازمه للاحتكاك الجاف.

شكل (2.2) يمثل خاصيه الاحتكاك الجاف.

ومع ضرورة تجزئة بحث أنواع الحركه نلتقي كذلك مع تلك الحالات عندما تكون قوة الاحتكاك (المقاومه) معبرا عنها بدالة أو سيه للسرعه وبمعامل قوة زوجي. فعلى سبيل المثال، في حالة ما يسمى بالاحتكاك التربيعي

$$\frac{1}{y}F(x,y) = \delta y^2 \quad . \qquad (2.17)$$

حيث $\delta<0$ عندما $y<0$ و $\delta>0$ عندما $y>0$.

نلاحظ أن مقدار قوة الاحتكاك عند $y = 0$ لا تعاني القفز في هذا النوع من الاحتكاك. عند وجود التغير القفزي لقوة الاحتكاك عند النقطة $y=0$، فمن الملائم ان نجزئ كل السؤال الى اهتزازات خاصه في النظام غير المحافظ، الى نوعين.

**الاولى** : تتطابق مع احدى اشارات الاحتكاك

**الثانيه** : = مع الاشاره الثانيه

هذه الانواع من الاهتزازات الحره تتبادل احداهما الاخرى على التوالي. ودراسة الحركه ككل تتطلب

تحليل مفصل لكلا النوعين. أما حالة الاعتماد الخطي لقوة الاحتكاك على السرعة فهي أكثر انتشارا في الانظمة الميكانيكيه، وهي تعبر عن الاحتكاك اللزج في الميكانيكا وفي حالة السرع غير العاليه.

في هذه الحالة ( حالة الاحتكاك اللزج ) فان قوة الاحتكاك

$$\frac{1}{y}F(x,y) = \delta y \quad , \qquad (2.18)$$

أي ان $F(x,y) = \delta y^2$ و $\delta > 0$ عند اية $y$.

أما في الدائره الكهربائيه فان قوة الاحتكاك تتطابق مع معكوس القوه الكهربائيه المؤثره الناشئه على المقاومه الخطيه. ولذلك يعبر عنها ( عن قوة الاحتكاك) بصورة $Ri$ وبتعبيرنا تكون قوة الاحتكاك في الدائره الكهربائيه $\delta y$.

وبصورة مطابقه فان $Ri$ تمثل قدرة مثل هذا الخسران في الطاقه ( القدره المميزه على المقاومه الخطيه ).

أما بالنسبة للاحتكاك التكعيبي نملك:

$$\frac{1}{y}F(x,y) = \delta y^3.$$

هذا القانون للاحتكاك نلتقي به في ميكانيك السرع العاليه، وهو صحيح أيضا بالنسبة للانظمة الكهربائيه ذات التشتت الخطي. اضافة الى انه يصادف غالبا ما نتعامل مع مركب الاحتكاك الخطي التكعيبي. لغرض بحث الحركه في الانظمه الخطيه غير المحافظه وكذلك الانظمه المحافظه من الممكن استخدام مختلف الطرق الكميه والنوعيه.

ولكن ليست كل الطرق ناجعه لغرض تحليل الحركة في الانظمه المحافظه. اما في الانظمه اللا محافظه

فمن الممكن استخدام كل الطرق بدون اضافات أو تحوير.

## 5§. طرق تحليل الحركه الاهتزازيه في الانظمه الخطيه المختلفه.

من الطرق المختلفه لايجاد حلول تقريبيه لمهمات الحركه الاهتزازيه تاتي بالدرجه الاولى : 1) طريقة التغير البطئ للسعه. 2) طريقة البحث التدريجي. 3) طريقة المستوى الطوري 4) طريقة التجزئه الخطيه. 5) طريقة ليونار. من انجع هذه الطرق هي طريقة التغيير البطئ للسعه:

فهذه الطريقة هي وسيله متمكنه لتحليل الحركه في الانظمه المبحوثه التي تظهر شيوعا كبيرا، وهي (الطريقة) يمكن أن تعطي حلا مستمرا لأية فترة زمنيه مؤقته وتساعدنا على دراسة الصفات العامه للحركه وعمليات اقامة وتوازن النظام.

ولكننا بمقياس كامل يجب أن نستخدم مجموعة محدده (رغم انها كبيره) من الانظمه المهتزه وخصوصا الانظمه ذات التشتت القليل وذات اللاخطيه القليله، والتي فيها تختلف الاهتزازات عن الاهتزازات التوافقيه البسطة.

شروط اللاخطيه القليله للانظمة الملائمه والخمود القليل مع التغيير المستمر لصفات النظام وحل معادلة حركته، كل هذه الشروط التي تصف المعادله التفاضليه للنظام، تقود الى اعتبار أن حركة هذا النظام في هذه الحاله المحدد سوف تكون قريبه الى الحركه الهرمونيه الدقيقه، وبصورة مطابقه الى النظام الخطي المحافظ. فبالنسبة الى النظام المحافظ الخطي وبدرجة حريه واحده تكون المعادله التفاضليه التي تصف الاهتزازيه كما هو معروف لدينا:

$$\ddot{X} + X = 0 \quad . \qquad (2.19)$$

في هذه الحالة يكون مقياس الزمن $\tau$ محدداً بالعلاقة $\tau = \omega_0 t$، حيث $\tau$ الزمن المستغرق المبحوث و $t$ زمن اعتيادي ، $\omega_0$ - التردد الزاويء للذبذبات الحر .

اما بالنسبة الى النظام غير المحافظ والقريب الى المحافظ الخطي، تكون معادلته

$$\ddot{x} + x = f(x, \dot{x}) \cdot \qquad (2.20)$$

حيث ، $f(x, \dot{x})$ - عباره عن داله لاخطيه منتظمه حره للاحداثي $x$ وسرعة تغييره $\dot{x}$ . ومقادير هذه الداله تبقى قليله جدا مقارنة بالحدود على الطرف الايسر للمعادله (2.20)، وذلك انطلاقا من قوة الافتراض أن النظام المبحوث قريب الى الخطيه أو أن لاخطيته قليلة وأن الخسران بطاقته الاحتياطيه قليل أيضا .

فاذا بحثنا تغيرات المتغير $x$ طبقا للمقياس المنتخب للاحداثي والتي فيما تكون $x$ بحدود وحده واحده، فان الطرف الايمن من المعادله (2.20) سوف يكون صغيرا بالمقارنه مع وحده واحده . ولذلك فان المعادله (2.20) يمكن أن تكتب بالصوره :

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}) \cdot \qquad (2.21)$$

حيث $f(x, \dot{x})$ - دالة منتظمه محدده لاترتبط مع شروط القلة (لاترتبط مع شروط قلة لاخطية النظام المبحوث) . اما $\mu$ - هو عباره عن الكمية التي تحدد او توصف درجة قرب النظام المبحوث من النظام الخطي المحافظ. من كل ما تقدم نستنتج ان قوة الاحتكاك وبكل

انواعها هي قوه تنشأ في النظام اثناء الحركه وتعمل على اعاقة حركته وبالتالي ، اخماد الاهتزازات التي يعطيها النظام. ولذافهي تسمى قوه مخمده وهي رياضيا تتناسب مع سرعة حركة النظام . فاذا كانت $F_r$ تمثل قوه الاحتكاك ( قوة التخميد ...... .

فان $F_b \propto \dot{\psi}$ ، حيث $\dot{\psi}$ السرعه ، ومن ذلك ينتج ان :

$$F_b = -b\dot{\psi} \qquad (2.22)$$

وقد وضعت الاشاره السالبه لان القوه $F_r$ تعمل باتجاه معاكس لاتجاه الحركه ، اي بأتجاه معاكس لاتجاه السرعه . وحتى نتعرف على تاثير القوه المخمده في النظام الذي يعمل اهتزازات توافقيه ، نفترض انها القوه الوحيده المؤثره في النظام الذي تسمى اهتزازاته في هذه الحاله اهتزازات مخمده .

## 6 § . الذبذبات التوافقيه المخمده ( او المضمحله )

في دراستنا السابقه للحركه التوافقيه البسيطه بدرجة حريه واحده كنا قد اوضحنا تاثير القوه التي اسميناها القوه المخمده والتي سبق وبحثنا تاثيرها عندما تعمل على النظام بشكل انفرادي ، وقلنا ان هذه القوه تعمل على تقليل سرعة حركه النظام ، ومن ثم تقليل عدد الاهتزازات التي يعطيها النظام قبل عودته الى وضع التوازن الاصلي ، وذلك لانها تعمل باتجاه معاكس لاتجاه الازاحه . وهي من حيث المقدار تتناسب مع سرعة الحركه . من هذا نفهم أن القوه المخمده والتي هي قوة الاحتكاك والمسماة بالمقاومه تعمل بأتجاه القوه المرجعة او المعيده ( قوة المرونه )،

أي أن خط عطهما واحد،ومما يعملان سوية على تدمير حركة النظام وا يقافه باقصى سرعه .

والان نستطيع كتابة المعادلة التفاضليه التي تصف حركة الذبذبات المخمده (لاحظ المعادله 1.11،)

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (2.23)$$

حيث $$2\beta = b/m, \quad \omega_0^2 = k/m \qquad (2.24)$$

($b$- معامل المقاومه ،اي معامل التناسب الطردي بين السرعه $\dot{x}$ وقوة المقاومه ،$k$- معامل قوة المرونه او الصلادة .

نشير الى ان $\omega_0$ تمثل نفسها ذلك التردد الذي كان يمكن ان تنجز به الذبذبات الحره للنظام عند غياب مقاومة الوسط ( عندما $b=0$ ).هذا التردد يسمونه التردد الخاص للنظام..

عند تعويض الداله $x = e^{\lambda t}$ في المعادله (2.23 ) يقودنا ذلك الى المعادله الخصوصيه او المميزه

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0. \qquad (2.25)$$

جذري هذه المعادله يساويان

$$\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \quad \lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \qquad (2.26)$$

في حالة التخميد غير الكبير (عند $\beta < \omega_0$ ) فالتعبير تحت الجذر سوف يكون سالبا . نتصوره بالهيئه $(i\omega)^2$ ، حيث $\omega$ كمية ماديه ، تساوي

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad . \qquad (2.27)$$

حينذاك فان جذري المعادله الخصوصيه سوف يكتبا ن بالشكل

$$\lambda_1 = -\beta + i\omega , \quad \lambda_2 = -\beta - i\omega . \qquad (2.28)$$

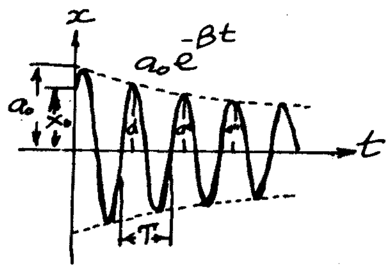
طبقا للمعادله (1.38) فان الحل العام للمعادلة (2.23) هو :

$$X = C_1 e^{(-\beta+i\omega)t} + C_2 e^{(-\beta-i\omega)t} = e^{-\beta t}\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right).$$

التعبير داخل الا قواس يماثل التعبير (1.50)، لذلك يمكن تصوره بهيئة مماثله للتعبير (1.54). بهذا الشكل في حالة التخميد غير الكبير فان الحل العام للمعادله (2.23) يمتلك الهيئه التاليه :

$$X = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) . \qquad (2.29)$$

هنا $a_0$، $\alpha$ ثابتين اختياريين ، $\omega$-كميه محدده بالمعادله (2.27) . على الشكل 2.3 اعطي منحني الداله (2.29). الخطوط المنقطه توضح الحدود التي تقع فيها ازاحة النقطه المهتزه X .




شكل 2.3

بالتوافق مع هيئة الداله (2.29) يمكن النظر الى حركة النظام كذبذبه توافقيه للتردد $w$ بسعة تتغير بالقانون $a(t)=a_0 e^{-\beta t}$ . قمم المنحنيات المنقطه تعطي منحني الداله $a(t)$، اضافة الى ان الكميه $a_0$ تمثل نفسها السعة في بداية اللحظة الزمنيه .

الازاحة الابتدائيه $x_0$ تعتمد، اضافة الى $a_0$ كذلك على الطور الابتدائي $\alpha$ ، حيث : $x_0 = a_0 \cdot \cos\alpha$ .
سرعة خمود الذبذبه تتحدد بالمقدار $\frac{b}{2m}$ الذي يساوي $\beta = \frac{b}{2m}$ ويسمونه معامل الخمود .

نجد الزمن $\tau$ الذي خلاله تتناقص السعه في $e$ من المرات. من التعريف $e^{-\beta t} = e^{-1}$ ، ينتج ان : $\beta\tau = 1$ وبالتالي $\beta = \frac{1}{\tau}$، اي ان معامل الخمود $\beta$ هو من حيث المقدار مقلوب ذلك الفاصل الزمني الذي خلاله تتناقص السعه بمقدار $e$ من المرات. طبقا للمعادلة (1.55) يصبح زمن الذبذبه المخمده يساوي

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{w_0^2 - \beta^2}} \qquad (2.30)$$

عندما تكون مقاومه الوسط غير كبيره ($\beta^2 \ll w_0^2$)، فإنّ زمن الذبذبه عمليا يساوي $T_0 = 2\pi/w_0$، ومع نمو معامل الخمود يزداد زمن الذبذبه . الانحرافات العظمى المتتاليه ( القمم ) في أي أتجاه ( على سبيل المثال $a'$ ، $a''$ ، $a'''$، ... الخ على الشكل 2.3) تشكل متناهيه هندسيه .

في الحقيقه انه، اذا كانت $a' = a_0 e^{-\beta t}$ ،

$$a'' = a_0 e^{-\beta(t+T)} = a' e^{-\beta T} \quad ,$$ فإن

$$a''' = a_0 e^{-\beta(t+2T)} = a'' e^{-\beta T}$$

... الخ ـ

وبشكل عام فان علاقة مقادير السعات المتوافقه مع اللحظات الزمنيه التي تختلف عن بعضها بزمن يساوي زمن ذبذبه واحده، تساوي:

$$\frac{a(t)}{a(t+T)} = e^{\beta t} \ .$$

هذه العلاقة تسمى تحديد الخمود ،ولوغاريتم هذه العلاقة يسمى ـ اللوغاريتم المحدد للخمود ويرمزله بالحرف $\lambda$ حيث:

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T, \quad (2.31)$$

(لايجب أن نخلط بين $\lambda$ في المعادلتين (2.25)،(2.31) . للتعبير عن خصائص النظام الممتز يستخدم عادة المحدد اللوغاريتمي للخمود $\lambda$ . فعند تعويض معامل الخمود $\beta$ من المعادله (2.31) عبر $\lambda$ و $T$، يمكن كتابة قانون تناقص السعة مع الزمن بالهيئة التاليه :

$$a = a_0 e^{-\frac{\lambda}{T} t} \ .$$

خلال الزمن $\tau$، الذي اثنائه تقل السعه بمقدار $e$ من المرات، يستطيع النظام أن ينجز $N_e = \frac{\tau}{T}$ من الذبذبات. من الشرط $e^{-\lambda \frac{\tau}{T}} = e^{-1}$ يحصل، أن $\lambda \frac{\tau}{T} = \lambda N_e = 1$ . وبالتالي، فان المحدد اللوغاريتمي للخمود هو من حيث

المقدار مقلوب عدد الذبذبات المنجزه خلال ذلك الزمن الذي تنتقص اثنائه السعه بمقدار $e$ من المرات.

للتعبير عن خصوصيات النظام المهتز غالبا ما تستخدم الكميه

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi Ne , \qquad (2.32)$$

المساة ب ملائمة النظام المهتز أو جودته . وكما يبدو من تعريف جودة النظام أو ملائمته فانها تتناسب طرديا مع عدد الذبذبات $Ne$ المنجزه من قبل النظام خلال ذلك الزمن ، الذي تنقص خلاله السعه بمقدار $e$ من المرات. في الفصل الاول نحن أو ضحنا أن الطاقة الكامله للنظام المهتز تتناسب طرديا مع مربع السعة (لاحظ المعادله (1.67). بالتوافق مع هذا فان الطاقة الكامله للنظام في حالة الذبذبات المخمده تتناقص مع الزمن بالقانون

$$E = E_o e^{-2\beta t} \qquad (2.33)$$

(حيث $E_o$ مقدار الطاقه في الزمن $t=0$).

وبإعادة تفاضل هذه المعادله بالنسبة للزمن ، نحصل على سرعة نمو طاقة النظام :

$$\frac{dE}{dt} = -2\beta E_o e^{-2\beta t} = -2\beta E . \qquad (2.34)$$

بتغيير الاشاره الى العكس، نحصل على سرعة تناقص الطاقه :

$$-\frac{dE}{dt} = 2\beta E . \qquad (2.35)$$

اذا كانت الطاقه تتغير قليلا خلال زمن يساوي زمن الذبذبه ، فان نقصان الطاقه خلال زمن الذبذبه

الواحده يمكن أيجاده بضرب المعادله (2.35) في $T$:

$$-\Delta E = 2\beta T E$$

(نشير الى ان $\Delta E$ تعني زيادة الطاقه ، بينما $-\Delta E$ تعني نقصان الطاقه). في النهاية عند الاخذ بنظر الاعتبار المعادلتين (2.31) ، (2.32) نصل الى العلاقة

$$\frac{E}{(-\Delta E)} = \frac{Q}{2\pi} \quad , \qquad (2.36)$$

التي ينتج منها ، انه في حالة الخمود الضعيف للذبذبات فان جودة النظام من الدقه ، الى عامل الضرب $2\pi$ تساوي علاقة الطاقه المخزونه في النظام في لحظة محدده ، الى نقصان هذه الطاقه خلال زمن ذبذبه واحده . من المعادله (2.30) ينتج انه مع نمو معامل الخمود فان زمن الذبذبه يزداد.

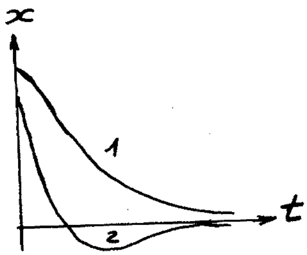
1) عند $\beta = \omega_0$ فان زمن الذبذبه يؤول الى المالا نهايه ، اي أن الحركه تكف عن أن تكون دورية .

2) عند $\beta > \omega_0$ فان جذري المعادله الخصوصيه يصبحان ماديان (لاحظ المعادله (2.26) وحل المعادلة (2.23) يصبح مساويا لمجموع حدين اسيين :

$$X = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

حيث $C_1$ ، $C_2$ ثابتين حقيقيين ، تعتمد مقاديرهما على الظروف الابتدائيه ( على $X_0$ وعلى $V_0$ )، وبالتالي فان الحركه تحمل طبيعة لادوريه ، اي ان النظام المزاح عن وضع توازنه عند عودته الى وضع التوازن لاينجز ذبذبه .

يوضح الشكل (2.4) طريقتين ممكنتين لعودة النظام الى وضع التوازن في حالة الحركه اللادوريه .




شكل 2.4

اي من هاتين الطريقتين يسلكها النظام في عودته الى وضع التوازن فذلك يعتمد على الظروف الابتدائيه، فالحركه المصوره بالمنحني 2 ، تحصل في تلك الحالة ، عندما النظام يبدا يتحرك من وضع موصوف بالازاحه $X_0$ ، الى وضع التوازن بسرعة ابتدائيه $v_0$ محدده بالشرط

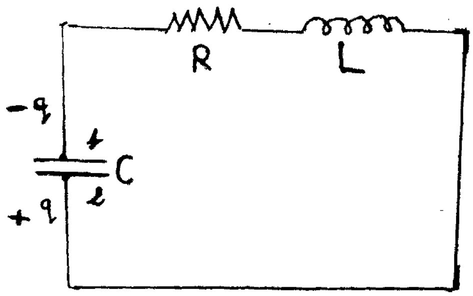
$$|v_0| > |X_0| \left(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right). \qquad (2.37)$$

هذا الشرط سوف يتحقق في تلك الحالة ، اذا أكسب النظام المزاح عن وضع التوازن دفعة قوية بمافيه الكفايه الى وضع التوازن .

اما اذا ازيح النظام عن وضع التوازن وترك بدون اي دفع (اي بسرعة ابتدائيه $v_0 = 0$ ) او أُكسب دفعةً غير كافية القوه (دفعه بحيث ان $v_0$ تبدو أنها اقل مما حددت في الشرط ( 2 . 37 )، فإن الحركه سوف تمر طبقا مع المنحني 1 على الشكل 2 . 4 .

## 7 § اهتزازات الدوائر الكهربائيه

آ دائرة (LC) : الدائره الكهربائيه التي يمكن آن تحدث فيها اهتزازات حره يمكن آن يؤخذ مثال لها متكون من دائره اهتزازيه بسيطه مؤلفه من مكثفه ( C ) مربوطه على التوالي مع ملف، حيث ( L )، ( لاحظ الشكل 5.2).




ففي حالة توصيل الملف بالمكثف المشحونه تظهر في الدائره الكهربائيه اهتزازات حره للشحنه على المكثف وللتيار في ملف الحث.

شكل 5.2

آما المجال الكهرومغناطيسي المتغير فينتشر في الفضاء بسرعة تساوي سرعة الضوء. ولذلك، إذا كانت المقاييس الطوليه لهذه الدائره ليست كبيره، اي ان

$$L \ll C/2$$

حيث $C=3\cdot10^{8}\frac{m}{s}$ سرعة الضوء في الفراغ.

ب- تردد الاهتزازات في الدائره الكهربائيه (LC)، لذلك يمكن ان نعتبر، أنه في كل لحظة من الزمن $t$، فان قوة التيار $I$ في جميع اجزاء الدائره تكون متكافئه. مثل هذا التيار المتغير يسمى مستقر المرونه. من قانون اوم بالنسبة لاجزاء الدائره 1-L-2 نحصل ان

$$iR = \varphi_1 - \varphi_2 + \xi_c$$

او

$$iR = -q/C - L\frac{di}{dt}$$

حيث $q$ شحنه المكثفه

( $\varphi_1 - \varphi_2$ ) فرق الجهد ( فرق الكمون ) على طرفي المكثف في لحظة حره من الزمن $t$ .

$R$ - المقاومه الكهربائيه للدائره ، ( $\mathcal{E}_c = -L \frac{di}{dt}$ ) الحث الذاتي في الملف.

من قانون حفظ الشحنه الكهربائيه ينتج ان قوة التيار المستقر المرونه هي $I = \frac{dq}{dt}$ ، ولذلك فان المعادله التفاضليه لاهتزاز الشحنه $q$ تمتلك الشكل التالي :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0. \qquad (2.38)$$

ولكن الاهتزازات الكهربائيه الحره في هذه الدائره تصبح توافقيه بسيطه اذا كانت المقاومه الكهربائيه $R=0$ ، حينذاك تصبح المعادله (2.38) بالهيئه التاليه :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0. \qquad (2.39)$$

اما التردد الزاوي $\omega$ ودور الذبذبه $T$ فهما يحققان معادلات ثومسون .

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad ; \quad T = 2\pi\sqrt{LC} \qquad ...(2.40)$$

من المعادله (2.39) يبدو لنا ان الكميه الفيزيائيه المتغيره الوحيده هي $q$ . فاذا عوضنا $\psi = q$ نحصل على

$$\ddot{\psi} + \omega^2\psi = 0. \qquad ...(2.41)$$

وهذه هي معادله تفاضليه من الدرجه الثانيه تمثل حركه اهتزازيه توافقيه ، اي حركة هزاز توافقي.

حل هذه المعادله يصبح كما سبقت دراسته بالهيئه التاليه:

$$\Psi = \Psi_0 \sin(\omega t + \alpha), \qquad (2.42)$$

أو

$$q = q_0 \sin(\omega t + \alpha).$$

أي أن الشحنه $q=\Psi$ تتغير حسب قانون الجيب . أما تيار الدائره $i$ فيساوي

$$I = i = \frac{dq}{dt} = q_0 \omega \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

$$i = I_0 \cos(\omega t + \alpha)$$
$$= I_0 \sin(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2})$$

$$i = I_0 \sin(\omega t + \varphi). \qquad (2.43)$$

حيث

$q_0$- سعة شحنة المكثف أو المتسعه ، $I_0 = \omega q_0 = \frac{q_0}{\sqrt{LC}}$ - سعة التيار، $\varphi_6$-الطور الابتدائي لشحنة المكثف . وكما يتضح من المعادلتين (2.42) ، (2.43) ، فان التيار في الدائره يسبق في الطور شحنه المكثف ب $\frac{\pi}{2}$ . أما فرق الجهد $u=\varphi_2-\varphi_1$ فهو الاخر يتغير بقانون توافقي ويتطابق في الطور مع الشحنه $q$ .

$$u_c = \frac{1}{C}\int I dt = \frac{1}{C}\int i dt$$
$$= \frac{1}{C} q_0 \sin(\omega t + \alpha).$$

$$u_c = U_0 \sin(\omega t + \alpha) \qquad .(2.44)$$

حيث $U_0 = \frac{q_0}{C}$-سعة فرق الجهد،وبالتالي نحصل أن سعة قوة التيار

$$I_0 = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}$$

حيث الكميه $\sqrt{L/C}$ تسمى المقاومه الموجيه للدائره.
في حالة الاهتزازات التوافقيه الحره يحدث في الدائره الاهتزازيه تحوّل دوري لطاقه المجال الكهربائي $E_e$ للمكثف الى طاقه مجال مغناطيس $E_m$ في ملف الحث وبالعكس، أي أن

$$E_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} \sin^2(\omega t + \alpha)$$

$$E_e = \frac{q_0^2}{4C}\left[1 - \cos(2\omega t + 2\alpha)\right]. \qquad (2.45)$$

$$E_m = L\frac{I^2}{2} = L\frac{i^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2}\cos^2(\omega t + \alpha)$$

$$E_m = \frac{1}{4}LI_0\left[1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)\right]. \qquad (2.46)$$

ولذلك، فالاهتزازات التي تحدث في الدائره الكهربائيه غالبا ما تسمى بالاهتزازات الكهرومغناطيسيه.
مقادير $E_e$ و $E_m$ في الاهتزازات الكهرومغناطيسيه تتراوح بين 0 و max، وبالتطابق فهما يساويان $q_0^2/2C$ و $LI_0^2/2$، اضافة الى أن $q_0^2/2C = LI_0^2/2$. اما اهتزازات $E_e$ و $E_m$ فتكون مزاحة بالطور، أي أن :

عندما $E_e = 0$، فان $E_m = E_{max} = \frac{LI_0^2}{2}$، وبالعكس،

وعندما $E_m = 0$ ، فان $E_e = E_{max} = \frac{1}{2C} q_0^2$ .

الطاقة الكامله للاهتزازات الكهرومغناطيسيه في الدائره الحره الخاليه من المقاومه $R$ لا تتغير مع الزمن :

$$E = E_e + E_m = \frac{q_0^2}{2C} + \frac{L I_0^2}{2} = Const = h$$

حيث $h$ - ثابت .

2 ) دائرة $(LRC)$

دراسة الدائره الكهربائيه $(LRC)$ تعني دراسه الذبذبات المخمده الحره في هذه الدائره . وبالتالي معرفة طبيعة الخمود الحاصل لاهتزازات النظام .

الاهتزازات الميكانيكيه الحره مثلا يكون خمودها مسببا بشكل رئيسي من قبل الاحتكاك أو من قبل الاثاره في الاوساط المحيطه ذات الموجات المرنه .

أما الخمود في الدائره الكهربائيه الممتزه فيكون مسببا من قبل الخساره الحراريه في الموصلات ( الكابلات ) التي يتكون منها النظام ، أو تلك الكابلات الموجوده في المجال الكهربائي المتغير للنظام ، أو بسبب خسران الطاقه على الموجات الكهرومغناطيسيه أو الخسران الحراري في أشباه الموصلات والمواد ذات الصفات المغناطيسيه .

وبشكل عام يمكن استخلاص الاستنتاج التالي :

ان قانون خمود الاهتزازات يعتمد على صفات الانظمه المهتزه . يسمى النظام خطيا اذا كانت مقاييسه التي تصف طبيعته الفيزيائيه الجاريه في العمليه المبحوثه لا تتغير أثناء سير العمليه .

فعلى سبيل المثال سلك أو نابض البندول المتحرك في وسط لزج يمثل نظاما خطيا اذا كان معامل مقاومه الوسط ومرونه النابض لايعتمدان على سرعة وازاحة النابض .

أما الدائره الكهربائيه، فيمكن اعتبارها نظام خطيا اذا كانت مقاومتها R وسعتها الكهربائيه C والحث L لايعتمدون جميعهم على التيار في الدائره، ولا على شدة المجال . في الغالب تكون الانظمه الحقيقيه المهتزه قريبه للغايه في صفاتها الى الانظمة الخطيه . فالمعادله التفاضليه التي تصف الاهتزازات الحره المخمده في الدائره الكهربائيه الحقيقيه والتي مقاومتها $R \neq 0$ هي :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega^2 q = 0 . \qquad (2.47)$$

حيث

$$\cdot \beta = R/2L \quad ، \quad \omega = 1/\sqrt{LC}$$

فاذا كان الخمود ليس كبيرا ،أي عندما ($\beta < \omega$) فان اعتماد الازاحه $q$ يحقق معادلة الاهتزازات المخمده

$$q = q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha) \qquad 2.48)$$

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

حيث

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \qquad \varphi_0 = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

الكميات الثابته $q_0$، $\alpha$، $\varphi_0$، تعتمد على الظروف الابتدائيه اي على مقادير $q$ ، $dq/dt$ في بداية اللحظه الزمنيه $t = 0$ .

## § 8. الذبذبات الاضطراريه (المجبره)

في الحالة عندما تكون القوه المجبره تتغير بقانون توافقي حينذاك توصف الذبذبات بالمعادله التفاضليه ،

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t. \qquad (2.49)$$

(لاحظ المعادله (1.13)).

هنا $\beta$-معامل الخمود ، $\omega_0$-التردد الخاص للنظام. (لاحظ المعادلة (....(2.24)) $f_0 = F_0/m$) - $F_0$ سعة القوه المثيره)

$\omega$- تردد القوه المثيره (أو المجبره) .

المعادله (2.49) تصبح غير متجانسه . طبقا للبديهيه (1.31) فان الحل العام للمعادله غير المتجانسه يساوي مجموع الحل العام للمعادله المتجانسه والحل الخاص للمعادله غير المتجانسه . الحل العام للمعادله المتجانسه سبق لنا ودرسناه لاحظ (2.29) والذي هو حلا عاما للمعادله (....2.23) وهو يمتلك الصوره التاليه :

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha). \qquad (2.50)$$

حيث $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ و $a_0$ ، $\alpha$ ثابتين حريين . يبقى ان نجد الحل الخاص للمعادله (2.49) الذي لا يتضمن ثوابت حره . نستخدم لهذا الغرض الطريقه الموصوفه في نهاية البند 4 .

نضيف الى الداله الموجوده في الطرف الايمن من المعادله (2.49) جزءاً خياليا مثل الداله $if_0 \sin\omega t$ ، بعد ذلك نتصور الجزء الايمن بهيئة $f_0 e^{i\omega t}$ (لاحظ المعادله (1.24)). بهذا الشكل نصل الى المعادله:

$$\ddot{X} + 2\beta\dot{X} + w_0^2 X = f_0 e^{iwt}. \qquad (2.51)$$

حل هذه المعادله أسهل من حل المعادله (2.49)، لان تفاضل الأس وتكامله هنا اسهل من الداله المثلثيه .

نحاول ان نبحث عن الحل الخاص للمعادله (2.51) بالهيئه

$$\hat{X} = \hat{a}\, e^{iwt}. \qquad (2.52)$$

حيث $\hat{a}$ بعض عدد معقد . الداله (2.52) هي ايضا معقده، حيث اشير الى ذلك بالعلامة ( ^ ) فوق X .

تفاضل الداله (2.52) بالنسبة للزمن، نحصل على

$$\dot{\hat{X}} = iw\hat{a}\, e^{iwt}, \quad \ddot{\hat{X}} = -w^2\hat{a}\, e^{iwt}. \qquad (2.53)$$

وبتعويض المعادلتين (2.52) و (2.53) في المعادله (2.51)، نصل بعد الاختصار على العامل المشترك $e^{iwt}$ الى المعادله الجبريه :

$$-w^2\hat{a} + 2i\beta w\hat{a} + w_0^2\hat{a} = f_0 .$$

ومنها

$$\hat{a} = \frac{f_0}{(w_0^2 - w^2) + 2i\beta w}. \qquad (2.54)$$

نحن وجدنا مقدار $\hat{a}$، الذي فيه الداله (2.52) تحقق الداله (2.51).

نتصور العدد المعقد الموجود في مقام المعادله (2.54) بهيئة أسيه :

$$(w_0^2 - w^2) + 2i\beta w = \rho e^{i\varphi}. \qquad (2.55)$$

وطبقا للمعادله (1.18)، فأن :

$$\rho = \sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2} \quad , \varphi = arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \; . \quad (2.56)$$

نعوض في المعادله (2.54) المقام بالتوافق مع (2.55) نحصل

$$\hat{a} = f_0/\rho e^{i\varphi} = (f_0/\rho)\, e^{-i\varphi} .$$

نعوض $\hat{a}$ في المعادله (2.52) نحصل على الحل الخاص للمعادله (2.51):

$$\hat{X} = (f_0/\rho)\, e^{-i\varphi} . e^{i\omega t} = (f_0/\rho)\, e^{i(\omega t-\varphi)} .$$

في النهاية ناخذ الجزء الحقيقي من هذه الدالة نحصل على الحل الخاص للمعادله (2.49)

$$X = (f_0/\rho) \cos(\omega t - \varphi) .$$

وبتعويض مقدار $f_0$ ، وكذلك مقدار $\rho$ ، $\varphi$ من المعادله (2.56) نصل الى التعبير النهائي .

$$X = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right) . \quad (2.57)$$

نشير الى ان المعادله (2.57) لا تضم ثوابت حره . نستطيع الحصول على الحل الخاص للمعادله (2.49) بطريقة أخرى بمساعدة التخطيط الاتجاهي . نفترض ان الحل الخاص للمعادلة (2.49) يمتلك الهيئه

$$X = a \cos(\omega t - \varphi) . \quad (2.58)$$

حينذاك

$$\dot{X} = -\omega a \sin(\omega t - \varphi) = \omega a \cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}) . \quad (2.59)$$

$$\ddot{X} = -w^2 a \cos(wt - \varphi) = w^2 a \cos(wt - \varphi + \pi) \cdot \quad (2.60)$$

نعوض التعابير (2.60)ــ(2.58) في المعادله (2.49)،نحصل على العلاقة

$$w^2 a \cos(wt - \varphi + \pi) + 2\beta w a \cos(wt - \varphi + \pi/2) +$$

$$+ w_o^2 a \cos(wt - \varphi) = f_o \cos wt. \quad (2.61)$$

من المعادله (2.61) ينتج أن الثابتين $a$ و $\varphi$ يجب ان يمتلكا تلك المقادير بحيث ان الداله التوافقيه $f_o \cos wt$ كانت تساوي مجموع ثلاث دوال توافقيه، موجوده في يسار المعادله .

اذا صورنا الداله $w_o^2 a \cos(wt - \varphi)$ بمتجه طوله $w_o^2 a$ متجه الى اليمين ( لاحظ الشكل 2.6 )،

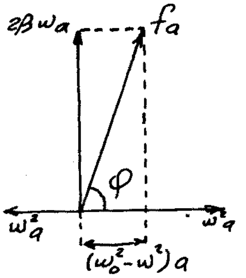
لذلك فالداله $2\beta w a \cos(wt - \varphi + \frac{\pi}{2})$ تصور بالمتجه الذي طوله $2\beta w a$ دائر بزاويه $\pi/2$ بالنسبة للمتجه $w_o^2 a$ عكس عقارب الساعه ،بينما الداله $w^2 a \cos(wt - \varphi + \frac{\pi}{2})$ فتصور بمتجه طوله $w^2 a$ دائر بالنسبة الى المتجه $w_o^2 a$ على زاويه $\pi$ . لكي تحقق المعادله (2.61) مجموع ثلاثة متجهاتحسابيه يجب ان تتطابق مع المتجه الذي يصور الداله $f_o \cos wt$ . ومن الشكل 2.6أ. يبدو آن مثل هذا التطابق ممكن فقط بمقدار السعه $a$ التي يمكن ان تتحقق من الشرط :

$$(w_o^2 - w^2) a^2 + 4\beta^2 w^2 a^2 = f_o^2 \quad ,$$

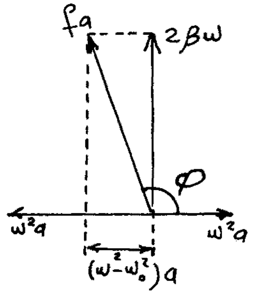
ومن ذلك نجد :ــ

$$a = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}} . \qquad (2.62)$$

(عوضنا $f_0$ من العلاقة):
$F_0/m$ .




شكل 2.6 أ




شكل 2.6 ب

الشكل أ ( 2.6 ) يجاوب عن الحاله : $\omega<\omega_0$ . من الشكل ب( 2.6) الذي يجب عن الحاله : $\omega>\omega_0$ ، نحصل على نفس المقدار للسعه $a$ .

الشكل 6 . 2 . يساعدنا كذلك في الحصول على مقدار الزاويه $\varphi$ التي تصور نفسها كمقدار التاخر في الطور من طرف الذبذبات الاضطراريه (2.53) عن القوه الخارجيه التي تشترطها هذه الذبذبات. من الشكل ينتج ان

$$tg\,\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} . \qquad (2.63)$$

بتعويض مقادير $a$، $\varphi$ المحدده في المعادلات (2.62) ، (2.63) في المعادله (2.58) نحصل على الداله (2.57) . الداله (2.57) بجمعها مع الداله (2.50) تعطي الحل العام للمعادله (2.49) التي تصف سلوك للنظام في

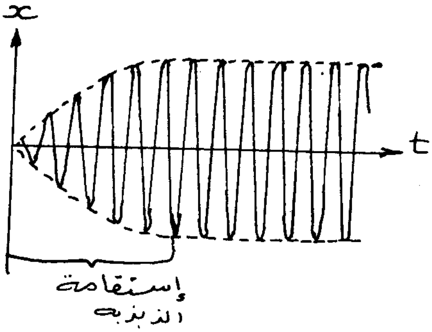
حالة الذبذبات الاضطراريه ، الحد (2.50) يلعب دورا ملحوظا فقط في المرحلة الابتدائيه لعملية ما يسمى استقامة الذبذبات شكل 2.7. مع مرور الزمن وبقوة قانون الاس للمضروب $e^{-\beta t}$ يتناقص أكثر فأكثر دور الحد (2.50) . وبعد مرور كفايه من الزمن يمكن اهماله ، محتفظين فقط بالحد (2.57).

بهذا الشكل فان الداله (2.57) تصف الذبذبات الاضطراريه المستقامه التي تمثل نفسها ذبذبات هرمونيه بتردد يساوي تردد القوه الاضطراريه أو المجبره .

سعة الذبذبات الاضطراريه (2.62) تتناسب طرديا مع سعة القوه الاضطراريه . بالنسبة للنظام المبحوث ( المحدده له $\omega_0$ ، و $\beta$ ) تعتمد السعه على تردد القوه المجبره .

الذبذبات الاضطراريه تتأخر في الطور عن القوه الاضطراريه ، اضافة الى أن كمية التأخر $\varphi$ تعتمد كذلك على تردد القوه الاضطراريه ( لاحظ المعادله ( 2.63).

اعتماد سعة الذبذبات الاضطراريه على تردد القوه الاضطراريه يقود الى انه عند بعض الترددات المحدده للنظام المبحوث تبلغ سعة الذبذبات $a$ قيمتها العظمي. النظام المهتز يبدي تعاطفا خاصا عند هذا التردد . هذه الظاهره تسمى الرنين Resonance ، والتردد المطابق لها يسمى بتردد الرنين .




استقامه الذبذبات

شكل 2.7 .

لكي نحدد تردد الرنين $\omega_{Res}$ ، من الضروري ان نجد القيمه العظمى للداله (2.62) أو ما يماثل ذلك ، القيمه الصغرى للتعبير الموجود تحت الجذر في المقام. نفاضل مقام الداله بالنسبة الى $\omega$ ونساويه بصفر ، نحصل على الشرط الذي يحدد $\omega_{Res}$ :

$$-4(\omega_0^2-\omega^2)\omega+8\beta^2\omega=0 . \quad (2.64)$$

المعادله (2.64) تمتلك ثلاثه حلول :

$$\omega=0 , \quad \omega=\pm\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2} .$$

الحل الذي يساوي صفر ، يتوافق مع القيمه العظمى للمقام . من الحلين الآخرين يجب أن يهمل الحل السالب لأنه لا يمتلك معنى فيزيائي ( التردد لا يمكن أن يكون سالب ) .

وبهذا الشكل بالنسبة لتردد الرنين يحصل مقدارا واحدا:

$$\omega_{Res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (2.65)$$

نعوض هذا المقدار في (2.62) نحصل

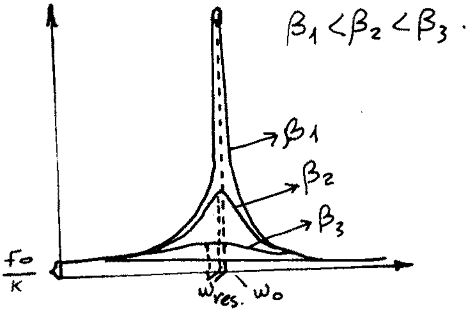
$$a_{Res} = F_0 / 2\beta m \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (2.66)$$

من هذه المعادله ينتج أنه ، عند غياب مقاومة الوسط تؤول السعه في حالة الرنين الى المالا نهايه .

طبقا للمعادله (2.65) فان تردد الرنين عند نفس الظروف ( عند $\beta = 0$ ) يتطابق مع التردد الخاص لذبذبات النظام $\omega_0$ . اعتماد سعة الاهتزازات الاضطراريه على تردد القوه الخارجيه المجبره ( او الشئ نفسه على تردد الذبذبات ) وضح بيانيا على الشكل 2.8 . المنحنيات الانفراديه على البياني تتوافق مع المقادير المختلفه ل $\beta$ . وبالتوافق مع (2.65) و (2.66) ، بقدر ما يكون $\beta$ صغيرا ، تكون قيمة هذا المنحني عاليه ومزاحه نحو اليمين .

عند التخميد الثقيل جدا ( بحيث ان $2\beta^2 > \omega_0^2$ ) يصبح تعبير تردد الرنين خيالياً . هذا يعني أنه في مثل هذه الظروف لا يلاحظ الرنين — مع زيادة التردد تتناقص سعة الذبذبات الاضطراريه بصوره متكافئه جانبياً .

(لاحظ المنحني الاسفل على الشكل 2.8 ). مجموعة منحنيات الداله (2.62) المصوره على الشكل 2.8 والتي تتوافق مع مقادير مختلفه للمقياس $\beta$ ، تسمى منحنيات الرنين .




شكل 2.8

من مفهوم منحنيات الرنين يمكن صياغة ملاحظة أخرى:
عند اقتراب $\omega$ الى الصفر فان جميع المنحنيات تمر او تأتي الى نفس المقدار الحرج المختلف عن الصفر الذي يساوي $F_0/m\omega_0^2$ ،أي الى $F_0/k$ . هذا المقدار يمثل نفسه الازاحه عن وضع التوازن ،التي يحصل عليها النظام تحت تأثير قوه ثابته $F_0$ . عند اقتراب $\omega$ الى المالانهايه، فان جميع المنحنيات بصوره غير متماثله تقترب الى الصفر ، لأنه عند التردد الكبير تغير القوه الاضطراريه اتجاهها بسرعه عالية جدا ، بحيث أن النظام لايستطيع أو لا يلحق أن يزاح عن وضع التوازن. في النهايه نلاحظ انه كلما كان $\beta$ صغيرا ،كلما تتغير السعه بقوه مع التردد قرب الرنين ، وكلما كانت قيمة المنحني أكثر حدة .

من المعادلة (2.66) ينتج أنه عند التخميد القليل أو الضعيف (أي عند $\beta \ll \omega_0$ ) فان السعة عند الرنين

تساوي بالتقريب

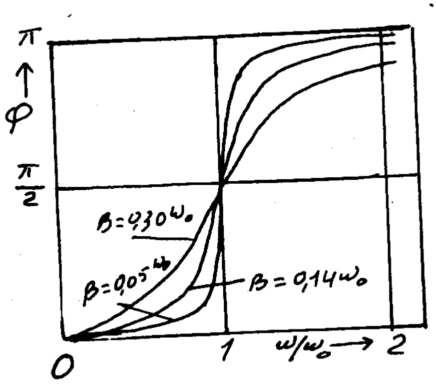
$$a_{Res} \approx \frac{F_0/m}{2\beta\omega_0} \; .$$

نقسم هذا التعبير على الازاحة $X_0$ عن وضع التوازن تحت تأثير قوه ثابته $F_0$ ، ($X_0 = F_0/m\omega_0^2$) ، في النتيجة نحصل :

$$\frac{a_{Res}}{X_0} \simeq \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = Q \; . \qquad (2.67)$$

(لاحظ المعادلة 2.32) . بهذا الشكل تُظهر جودة النظام $Q$ كم مرة تزيد السعه في لحظة الرنين ازاحه النظام عن موضع التوازن تحت تأثير قوه ثابته وهو نفس الكميه التي تمتلكها سعة الاهتزازات الاضطراريه ( هذا صحيح فقط عند التخميد غير الكبير ).

من الشكل 2.9 واضح ان الذبذبات الاضطراريه تتأخر بالطور عن القوه الخارجيه الاضطراريه ، اضافة الى ان كمية هذا التاخر $\varphi$ تقع بحدود من 0 الى $\pi$ . اعتماد $\varphi$ على $\omega$ عند مقادير مختلفه لـ $\beta$ وُضِّح بيانياً على الشكل 2.9 .




شكل 2.9

التردد $\omega_0$ يتيوافق مع $\varphi = \pi/2$ .

تردد الرنين اقل خصوصيه (لاحظ (2.65))، وبالتالي في لحظة الرنين $\varphi < \frac{\pi}{2}$ . عند التخميد الضعيف $\omega_0 \cong \omega_{Rez}$ ومقدار $\varphi$ عند الرنين يمكن اعتبار مساويا ل $\pi/2$ . مع ظاهرة الرنين يمكن أن نعتبر أنه عند بناء الماكينات ومختلف انواع الاجهزه لا يجب في أية حاله من الاحوال ان يقترب التردد الخاص $\omega_0$ لهذه الادوات من ترددات التأثيرات الخارجيه الممكنه . فعلى سبيل المثال التردد الخاص لذبذبات هياكل السفن او اجنحة الطائرات تختلف بقوه عن ترددات

الذبذبات التي يمكن آن تثار من قبل دوران بعض موجهات هذه الاجهزه . في الحالة المعاكسه تظهر بعض الذبذبات التي يمكن آن تسبب خللاً لهذه الاجهزه، ومثال على هذا التحذير الحادثه المعروفه عندما انهار جسر أثناء مرور مجموعه من العسكر عليه مشيا على الاقدام وذلك لتوافق التردد الخاص لهيكل الجسر مع التردد الذي ساربه العسكر.

ولكن رغم هذه المحاذير فان لظاهرة الرنين فوائد هامه خاصة في مجال الصوت والتكنيكا ترد الراديو يه .

يمكن أن تحل معادلة الاهتزازات الاضطراريه بأستخدام لاغرانج . اذا كان انحراف النظام عن وضع التوازن صغيرا، لذلك كقاعده يمكن ان نعبر عن هذه الحركه بمعادله خطيه .

معادلة حركة النظام بدرجة حريه واحده توصف بالنسبة لاحداثي مستنتج ، حر ، مختار وواحد $q_j$ .

الانتخاب الجيد لهذا الاحداثي يسهل حل السؤول المطروح . معادلة الحركه يمكن آن تصاغ آو تركب على قاعدة معادله لاغرانج من الصنف الثاني :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad (2.68)$$

حيث $T$ الطاقه الحركيه للنظام،
$Q_j$ - القوه المستنتجه
في حالة الاحتكاك اللزج والحركه في مجال القوى الكامنه فان ( 2.69

$$Q = -\left[ \frac{\partial U}{\partial q_j} + b(q_j)\, \dot{q}_j \right].$$

حيث $U$ - الطاقه الكامنه
$b(q_j)$ ـ معامل الاحتكاك
الطاقه الحركيه يعبر عنها بالتعبير

$$T = \frac{1}{2} a(q_j)\, \dot{q}_j^{\,2} . \qquad (2.70)$$

وضع التوازن للنظام $q_j = q_o$ يحدد بالعلاقة

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q_j}\right|_{q_j = q_o} = 0 . \qquad (2.71)$$

اما وضع الاستقرار فيحدد بالعلاقه

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_j^2}\right|_{q_j = q_o} > 0 . \qquad (2.72)$$

اذا كان انحراف النظام $q_j$ عن وضع الاستقرار المتوازن صغيراً، فانه من الممكن أن نهمل الحدود / الصغيره في تحليل $a(q)$ ، $b(q)$ و $U(q)$ في مسلسل من $q_j$ ونبقي في $U$ ، $T$ و $Q$ حدود الدرجه الثانيه من الصغر.

حينذاك

$$a(q_j) \cong a(q_0) = a \qquad (2.73)$$

$$T(q_j) \cong \frac{1}{2} a \dot{\xi}^2 \qquad (2.74)$$

$$b(q_j) \cong b(q_0) = b \qquad (2.75)$$

$$U(q_j) \cong U(q_0) + \xi \frac{\partial U}{\partial q_j}\Big|_{q_j=q_0} + \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial^2 U}{\partial q_j^2}\Big|_{q_j=q_0} \qquad (2.76)$$

يقترح أن $U(q_0) = 0$ . وبحساب (2.71) نمتلك

$$U(\xi) = \frac{1}{2} e \xi^2 . \qquad (2.77)$$

حيث $$e = \frac{\partial^2 U}{\partial q_j^2}\Big|_{q_j=q_0}$$

وبأستخدام المعادلات (2.68) ، (2.69) ، (2.74) ، (2.75) ، و (2.77) نحصل على معادلة تفاضليه خطيه من الدرجه الثانيه لأنحرافات النظام الصغيره عن وضع التوازن .

$$\ddot{\xi} + 2\beta \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0 \qquad (2.78)$$

حيث $\beta = \frac{b}{2a}$ -معامل الخمود (2.78)6 $\omega_0 = \sqrt{e/a}$ .

و $\omega_0$ هي التردد الزاوي الخاص للنظام الخطي المحافظ.

عند $\omega_0 > \beta$ ، فان حل المعادله (2.78) يمتلك الهيئه

$$\xi(t) = C_1 X_1 + C_2 X_2 = C_1 e^{-\beta t} \cos \omega t + C_2 e^{-\beta t} \sin \omega t \qquad (2.79)$$

لا حظ المعادلة (2.25) و (2.26).

نجد الثابت $C_1$ بتطبيق الظروف الابتدائيه على المعادله (2.79) أي عند $t = 0$ فان $\xi(t)=\xi(0)=\xi_0$ ، وبالتالي فا ن

$$C_1 = \xi$$

ولايجاد الثابت $C_2$ نفاضل المعادله (2.79) ونطبق الظروف الابتدائيه عند $t=0$

$$C_2 = \frac{\dot{\xi}_0 + \beta \xi_0}{\omega}$$

نعوض $C_1$ و $C_2$ في المعادله (2.79) نحصل

$$\xi(t) = e^{-\beta t}\left(\xi_0 \cos\omega t + \frac{\dot{\xi}_0 + \beta \dot{\xi}_0}{\omega} \sin\omega t\right). \quad (2.80)$$

حيث $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ حُدّدت من مقاييس النظام.

$\xi_0$ ، $\dot{\xi}_0$ – هما على التوالي إزاحة وسرعة النظام عند $t = 0$ أي الظروف الابتدائيه للحركه .

حل المعادله (2.80) ، يمكن تصوره كذلك بالهيئه

$$\xi(t) = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (2.81)$$

لاحظ المعادله (2.29):

حيث $a_0$ و $\alpha$ - ثابتين اختياريين يمكن تحديدهما من الظروف الابتدائيه للحركه كمايلي :

عند الزمن $t = 0$ تصبح المعادله (2.81) بالهيئه التاليه:

$$\xi_0 = a_0 \cos\alpha \; ; \; a_0 = \frac{\xi_0}{\cos\alpha} \qquad (2.82)$$

تفاضل المعادله (2.81) ونعوض عن $a_0$ من المعادله (2.82) نحصل

$$tg\alpha = -\frac{\beta\xi_0 - \dot{\xi}_0}{\omega\xi_0} . \qquad (2.83)$$

والان نستطيع أن نجد السعه $a_0$ في الظروف الابتدائيه بأستخدام المعادلتين (2.82) ، (2.83) بالشكل التالي

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \; ; \; \sin\alpha = \cos\alpha \, tg\alpha ,$$

$$\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \cos\alpha \, tg\alpha ,$$

$$1 - \cos^2\alpha = \cos^2\alpha \, tg^2\alpha ,$$

$$1 - \frac{\xi_0^2}{a_0^2} = \frac{\xi_0^2}{a_0^2}\left(-\frac{\dot{\xi}_0 + \beta\xi_0}{\omega \cdot \xi_0}\right)^2$$

$$a_0 = \sqrt{\xi_0^2 + \left(\frac{\dot{\xi}_0 + \beta\xi_0}{\omega}\right)^2} . \qquad \ldots(2.84)$$

عنـــد $\beta > \omega_0$ : يصبـح حـل المعـادلـه (2.78) بالهيئه التـاليــه :

$$\xi(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.85)$$

لا يجـاد الثـابت $C_1$ نطبـق الظـروف الابتـدائيـه :

عنـد $t = 0$ فـان $\xi(t) = \xi(0) = \xi_0$ وبالتـالـي تصبـــح المعـادلـه (2.85) بالشكـــل التـالـي:

$$\xi_0 = C_1 + C_2$$

وبالتـالـي ينتـج ان: $C_1 = \xi_0 - C_2 \ldots (2.86)$

تفـاضـل المعـادلـه (2.85) بالنسبـة للـزمـن ونطبـق الظـــروف الابتـدائيـه آخـذيـن بنظـر الاعتبـار المعـادلـه (2.86) نجد ان.

$$C_2 = \frac{\dot{\xi}_0 - \xi_0 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\xi_0 \lambda_1 - \dot{\xi}_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (2.87)$$

وبالتـالـي فـان :

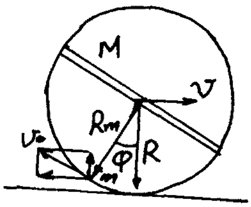
$$C_1 = \frac{\xi_0 \lambda_2 - \dot{\xi}_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (2.88)$$

نعـوض المعـادلـتين (2.87) ، (2.88) فـي المعـادلـه (2.85) نحصـــل

$$\xi(t) = \frac{\xi_0 \lambda_2 - \dot{\xi}_0}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{\xi_0 \lambda_1 - \dot{\xi}_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} \quad (2.89)$$

حيث $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ .

**مثال :** جد تردد الذبذبات الصغيره في نظام يتكون من إطار مهمل الوزن نصف قطره $R$ ، سلك متجانس كتلته $M$ موضوع بقطر الاطار ، وثقل كتلته $m$ موجود على الاطار بمسافات متساويه عن نهايتي السلك لاحظ الشكل 2.10 ....) .




شكل 2.10

المقاييس الطوليه للثقل أقل بكثير من $R$ ، الاطار يتدحرج على سطح أفقي بدون تزحلق. احتكاك التدحرج يهمل.

**الحل :** ندخل بهيئة احداثيات ستنتجه الزاويه $\varphi$ . الموضحه بالشكل . لتحديد وضع توازن النظام من الضروري أن نجد طاقته الكامنه $U$ كذالـه للزاويه $\varphi$ . بما أن مركز ثقل السلك يتحرك بمستوي أفقي، لذلك فان طاقته الكامنه لاتتغير ويمكن أن لانحسبها . حينذاك يمكن تحديد الطاقه الكامنه للنظام بالطاقه الكامنه للثقل $m$ في مجال قوة الجاذبيه ويعبر عنها بالمعادله (1)...

$$U = mgR(1-\cos\varphi) . \quad (1)$$

حيث $\cos\varphi = \frac{R-h}{R}$ , $h = R(1-\cos\varphi)$

ومن شرط التوازن (2.71) نحصل أن

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = mgR \sin\varphi = 0 . \quad \ldots (2)$$

من ذلك ينتج ، أن النظام يمتلك وضعين للتوازن:
الوضع الاول عند $\varphi_1 = 0$ والوضع الثاني عند $\varphi_2 = \pi$ .

وبما أن

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = mgR \cos\varphi . \quad (3)$$

لذلك

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = \begin{cases} mgR > 0 & \text{عند } \varphi = \varphi_1 = 0 , \\ -mgR < 0 & \text{عند } \varphi = \varphi_2 = \pi . \end{cases}$$

الوضع الاول هو وضع توازن مستقر ، أما الثاني فهو وضع توازن غير مستقر (قلق ). لتحديد التردد الخاص للذبذبات الصغيره $\omega_0$ قرب وضع التوازن المستقر، من الضروري أن نعبر عن الطاقه الحركيه للنظام خلال $\varphi$ ، و $\dot{\varphi}$ . لاجل ذلك نجد السرعه المطلقه للثقل $V_a$ في نظام احداثيات غير متحرك مرتبط بسطح التدحرج . اذا كانت سرعة حركة الثقل بالنسبة لمحور الاطار هي

$$V_0 = [\dot{\varphi} R_m] ,$$

بينما سرعة حركة محور الاطار نفسه هي :

$$V = [\dot{\varphi} R] \quad , \quad (|R_m| = |R|) .$$

لذلك فان

$$V_a = V_0 + V .$$

من ذلك ينتج أنه بالنسبة للمركبه الافقيه لـ $V_a$ نمتلك

$$V_{ah} = v - \dot{\varphi} R \cos\varphi ,$$

وبالنسبة للمركبه الشاقوليه : $V_{av} = \dot{\varphi} R \sin\varphi$

الطاقه الحركيه للثقل

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_{ah}^2 + \frac{1}{2} m v_{av}^2 ,$$

بينما الطاقه الحركيه لكل النظام = الطاقه الحركيه للسلك (دورانيه + انتقاليه ) + الطاقه الحركيه للثقل

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m (v - \dot{\varphi} R \cos\varphi)^2 + \\ + \frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2 R^2 \sin^2\varphi ,$$

حيث $I = \frac{1}{3} M R^2$ - عزم عطالة السلك بالنسبة لمحور الاطار .

وبالتالي تصبح الطاقه الحركيه لكل النظام

$$T = \left[ \frac{2}{3} M R^2 + M R^2 (1 - \cos\varphi) \right] \dot{\varphi}^2 . \qquad (4)$$

نبحث الذبذبات الصغيره للنظام قرب وضع التوازن $\varphi_1$، معبراً عنها بالاحداثي $\xi$، أي ندخل $\varphi = \varphi_1 + \xi$ .

حينذاك ، بتحليلنا

$$\cos(\varphi_1 + \xi) \simeq \cos\varphi_1 - \xi \sin\varphi_2 - \frac{1}{2} \xi^2 \cos\varphi_1 - \ldots\ldots ،$$

نهمل الحدود من الترتيب الثالث في تعبير الطاقه ثم نحسب

$\cos \varphi_1 = 1$ ، نجد ان

$$T \cong \frac{2}{3} M R^2 \dot{\xi}^2 . \qquad \text{.....(5)}$$

نحلل $U(\varphi_1 + \xi)$ الى مسلسل، مفترضين ان $U(\varphi_1) = 0$ ونهمل حدود الرتبه الثالثه من القلة، نجد أن

$$U = \frac{1}{2} m g R \xi^2 . \qquad \text{.....(6)}$$

وباستخدام التعبير (2.78)، حيث $\omega_0 = \sqrt{e/a}$

نجد ان $a$ من المعادله (5) تساوي $\frac{2}{3} M R^2$

و $e$ من المعادله (6) تساوي $\frac{1}{2} m g R$.

لذلك فان $\omega_0 = \sqrt{e/a} = \sqrt{\frac{3mg}{4MR}}$ .

**تحليل الحل :** نبحث الحالات الحرجه للحركه .

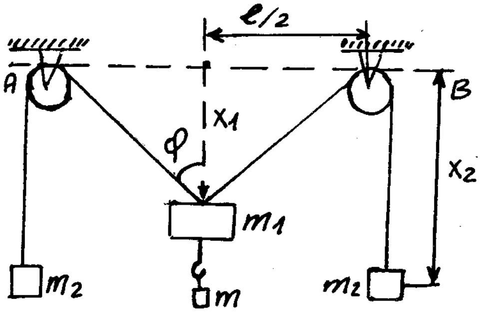
عند $m \ll M$ أو $m \to 0$ فان:

هذه الحركه تتوافق مع التدحرج المنتظم للاطار مع السلك على السطح الافقي .

عند $m = 0$، فان كل من $\frac{\partial U}{\partial \varphi}$ و $\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$ يؤولان الى الصفر، لأنه في هذه الحاله لاتعتمد الطاقه الكامنه $U$ على $\varphi$ وليست هناك أهميه لوضع توازن النظام .

عند $M \ll m$ ا في هذه الحالة يكون الثقل $m$ قد ثبت عملياً على الاطار المهمل الوزن ) تصبح الطاقه الحركيه للنظام في التقريب ( 5 ) آيلة الى الصفر. من الضروري أن نشير الى أن اهمال الحدود من الرتبه الثالثه فما فوق من حيث القلة تصبح مقارنة مع حدود الرتبه الثانيه ، أي آنه حتى الذبذبات الصغيره قرب وضع التوازن لا تقترب بهيئتها الى الشكل التوافقي ، الامر الذي لا يساعدنا على استخدام طريقة المعادلات الخطيه .

**المثال : 2** ــ الحركه في الظروف الابتدائيه المحددة. على الثقل المتوسط $m_1$ ، الموجود في النظام المتوازن ( لاحظ الشكل 2.11) علق ثقل كتلته $m \ll m_1$ بدون دفع . جد قانون حركة الثقل $m_1$ . الثقلين $m_2$ في الجانبين متكافئين وكتلة كل منهما $m_2$. البكرات تعتبر بدون وزن . الخيط ــ بدون وزن وغير قابل للتمدد . الاحتكاك ومقاييس البكرات تهمل.




" شكل 2.11 "

**الحل :** بقدر ما أن $m << m_1$ ، لذلك فان الذبذبات الناتجه عند تعليق الثقل $m$ سوف تكون صغيره . أن ذلك يساعدنا على جعل معادلة حركة النظام خطيه نجد الوضع الجديد لتوازن النظام مع الثقل $m$ .

لهذا الغرض نكتب تعبير الطاقه النظام الكامنه $U$ في مجال قوى الجاذبيه . نأخذ الخط الافقي $AB$ باعتباره مستوي حساب الطاقه الكامنه $U$ . ندخل الاحداثي المستنتج $X_1$ . على الشكل التوضيحي أشير الى الاحداثي $X_2$ للثقل $m_2$ والذي يعبر عنه خلال $X_1$ بالصوره التاليه :

$$X_2 = \mathcal{L} - \sqrt{X_1^2 + \frac{\ell^2}{4}} \quad . \qquad (1)$$

حيث $\mathcal{L}$ طول كل من الخيطين ،

وهكذا نجد أن

$$U = -(m_1 + m) g X_1 - 2 m_2 g \mathcal{L} + 2 m_2 g \sqrt{X_1^2 + \frac{\ell^2}{4}} \quad \ldots . 2$$

بتحديد نا الوضع لتوازن، نحسب

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = -(m_1 + m) g + 2 m g \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + \frac{\ell^2}{4}}} \quad . \qquad \ldots . 3$$

بمساواة $\frac{\partial U}{\partial X_1}$ للصفر وحل المعادله المحصله، نجد

$$X_{10} = \frac{1}{2} \frac{m_1 + m}{\sqrt{4 m_2^2 - (m_1 + m)^2}} \quad . \qquad \ldots (4)$$

يتحقق وضع التوازن ، اذا كان $2m_2 > m_1 + m$ . لتقدير استقراريه هذا الوضع نحسب

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} = m_2 g \frac{\ell^2}{2\left(X_1^2 + \frac{\ell^2}{4}\right)^{3/2}} > 0 . \qquad (5)$$

وضع التوازن مستقر .

نصيغ معادله للذبذبات الصغيره للثقل $m_1$ حول $X_{10}$ .

الطاقة الحركيه للنظام

$$T = \frac{1}{2}(m_1+m)\dot{X}_1^2 + \frac{4m_2X_1^2}{4X_1^2+\ell^2}\dot{X}_1^2 \quad ..(6)$$

بأدخال الانحراف الصغير $(X_{10} - X_1) = \xi$ ، وبجمع U و 6 وكذلك المعامل عند $\dot{X}_1^2$ للتعبير (6) في مسلسل بالنسبة لـ $\xi$ محددين أنفسنا بحدود الدرجة الثانيه للثقلة، نجد

$$U \cong \frac{1}{4}\frac{m_2 g\ell^2}{\left(X_{10}^2+\frac{\ell^2}{4}\right)^{3/2}} , \qquad (7)$$

$$T \cong \left[\frac{1}{2}(m_1+m) + \frac{X_{10}^2}{X_{10}+\frac{\ell^2}{4}}m_2\right]\dot{\xi}^2 . \qquad (8)$$

من شروط السؤال فان قوى الاحتكاك لاتحسب، ومعامل الخمود $\beta = 0$ . لذلك ،باستخدام المعادله (2.78) و (2.78) نحصل على معادلة الذبذبات الصغيرة بالهيئه

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0 , \qquad ...(9)$$

حيث

$$\omega_0^2 = \frac{1}{2}m_2 g\ell^2\left[(m_1+m)\left(X_{10}^2+\frac{\ell^2}{4}\right)+2m_2X_{10}^2\right]^{-1}\left(X_{10}^2+\frac{\ell^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

الازاحه الابتدائيه $\xi_0$ للثقل $m_1$ عن وضع التوازن $X_{10}$ هي:

$$\xi = X'_{10} - X_{10} \quad , \qquad \ldots.(10)$$

حيث $X'_{10}$ — وضع التوازن الابتدائي للنظام قبل تعليق $m$ ، وهذا الوضع يتحدد بالمعادله (4) اذا وضعنا $m = 0$ .

بالتعويض عن $X_{10}$ ، وما حصل بالطرق المشار اليها لقيمة $X'_{10}$ في المعادله (10)، نحصل

$$\xi_0 = \xi_0(0) = \frac{\ell}{2}\left(\frac{m_1}{\sqrt{4m_2^2 - m_1^2}} - \frac{m_2}{\sqrt{4m_2^2 - (m_1+m)^2}}\right). \quad (11)$$

بالاتجاه الموجب الذي آختير $X_1\xi_0 < 0$ .

السرعه الابتدائيه للثقل $m_1$ من شروط السؤال تساوي صفر ، لأن الثقل يعلق بدون دفع :

$$\dot{\xi}_0 = \dot{\xi}(0) = 0. \qquad (12)$$

من الشروط الابتدائيه (11)، (12) يصبح حل المعادله (9) بالهيئه

$$\xi = \xi_0 \cos \omega_0 t. \qquad (13)$$

تحليل الحل ومناقشته . نفترض آن تركيب النظام آو بنائه بالهيئه، بحيث آن الزاويه $\varphi$ قريبه من الصفر. هذا يمتلك مكانا عندما $m_2 = \frac{m_1}{2}$ ، $\mathcal{L} \gg \ell$ .

في الحالة الحرجه عند $\varphi = 0$ ، $\ell = 0$ و $m_2 = \frac{m_1}{2}$ ، تصبح احدثيات وضع التوازن $X_{10}$ بالمعادله (4) غير محدده . آي ثقل مهما يكن صغيرا $m$ ينقل النظام من وضع التوازن الابتدائي ، اضافة الى آن وضع التوازن الجديد لا يتحقق . تحليل التعبير (11) يوضح آن الانحراف

الابتدائي $\xi(0)$ عند $m_2=\frac{m_1}{2}$ لانهائي وغير محدد . بهذا الشكل ، بقدر ما تكون الزاويه $\varphi$ صغيره ، بقدر ما يجب أن يتحقق الشرط $m \ll m_1$ بدقه ، والذي فيه أمكن جعل معادلة الحركه خطيه .

2) .. أفرض أن كتلة الثقل المتوسط $m_1$ أقل بكثير من الكتلتين الجانبيتين $m_1 \ll m_2$ .
لأجل تفسير خصوصية مثل هذا النظام يكفي وضع $m_1=0$ في المعادلات المحصله أعلاه . حينذاك يصبح إنحراف النظام الأبتدائي

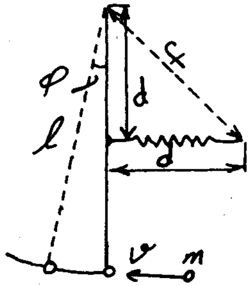
$$\xi(0)=-\frac{\ell}{2}\frac{m}{\sqrt{4m_2^2-m}} \cdot \qquad (11a)$$

أو عند $m \ll m_2$

$$\xi(0)\cong-\frac{\ell}{4}\frac{m}{m^2} \cdot$$

هذه التعابير توضح أن امكانية أن تكون معادلة الحركه خطيه عند $m_1 \ll m_2$ تتحدد بالشرط $m \ll m_2$ وليس $m \ll m_1$ .

**مثال 8 :** مذبذبا رياضي طوله $\ell$ وكتلته $m_\ell$ يرتبط بنابض موضوع أفقيا طوله $d$ كما موضح على الشكل (12 . 2) :



أطلقت على الثقل $m_\ell$ اطلاقه كتلتها $m$ كانت طائره أفقيا بسرعة $v$.

(شكل 12 . 2)

حدد الشرط الذي يكون فيه انحراف المذبذب بعد تصادم الاطلاقه صغيرا .

ضمن هذا الشرط جد قانون حركة المذبذب ، اذا كان عزم قوة الاحتكاك بالنسبة للمحور $O$ يتناسب طرديا مع السرعه الزاويه ( $M = h\dot{\varphi}$ ) حدد المحدد اللوغاريتمي لخمود النظام .

اذا علمت أن معامل مرونة النابض $c$ ، وهو غير قابل للتشوه في هذه الظروف.

**الحل :** بما انه في الوضع الشاقولي للمذبذب يبقى النابض بدون تشويه ، لذلك فان هذا الوضع هو وضع توازن .

الانحرافات الصغيره للمذبذب تشترط أن تحسب مقادير $\varphi$ أصغر بكثير من $\pi/2$ ، أي أن ( $\varphi \ll \frac{\pi}{2}$ ) والتي ضمن حدودها يمكن لمعادلة الحركه ان تكون خطيه .

انحرافات النظام بعد التصادم صغيره ، اذا كانت الطاقه الحركيه للأطلاقه يمكن مقارنتها مع تغيير الطاقه الكامنه للنظام عند $\varphi \ll \frac{\pi}{2}$ . الطاقه

الكامنه للنظام عند انحراف المذبذب على زاويه $\varphi$ تساوي

$$U=(m+m_\ell)g\ell(1-\cos\varphi)+\frac{1}{2}CX^2, \quad \ldots 1$$

حيث (2)... $X\cong\sqrt{d^2+f^2-2df\cos(45^\circ+\varphi)}-d$

هي الاستطالة المطلقه للنابض .

**الحد الاول** من المعادله (1) يعني الطاقه الكامنه للثقل مع الاطلاقه المقذوفه في مجال الجاذبيه الارضيه ،

**الحد الثاني :** الطاقة الكامنه لمرونة تشوه النابض .
نعوض المعادله (1) بمعادلة تمثل حاصل ضرب $\varphi^2$ على معامل ثابت . لاجل هذا الغرض نحسب

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}=(m+m_\ell)g\ell\cos\varphi+\sqrt{2}\,Cd^2A^{-1}[C(A-d)-\sqrt{2}\,d^3A^{-2}S^2] \quad \ldots (3)$$

حيث

$$A=d\sqrt{3-2\sqrt{2}\,C}\ , \ S=\sin(45^\circ+\varphi),\ C=\cos(45^\circ+\varphi).$$

بما انه في وضع التوازن $\varphi=0$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\right|_{\varphi=0}=(m+m_\ell)g\ell+Cd^2,$$

لذلك

$$U\cong\frac{1}{2}\left[(m+m_\ell)g\ell+Cd^2\right]\varphi^2,$$

بهذا الشكل ، اذا

$$\frac{mv^2}{2}\cong\frac{1}{2}\left[(m+m_\ell)g\ell+Cd^2\right]\varphi^2$$

حيث $\varphi\ll\frac{\pi}{2}$ ، لذلك فان خطية معادلة الحركه ممكنه .
لاجل هذا التركيب من الضروري التعبير عن الطاقه

الحركيه للنظام

$$T = \frac{1}{2}(m+m_\ell)\ell^2\dot{\varphi}^2 = \frac{a\dot{\varphi}^2}{2}. \qquad (4)$$

المعامل $a$ في المعادله (4) ثابته، ولذلك ليس هناك ضروره لعمل اية تفاضلات إضافيه.

معامل الخمود $\beta = \frac{b}{2a}$ وطبقا لشروط المسألة فأن

$$\beta = h/2(m+m_\ell)\ell^2 .$$

نعوض مقادير المعاملات $e$ و $a$ في العلاقة (2.73)، نجد $\omega_0$.

وبتعويض $\beta$ و $\omega_0$ في المعادله (2.70) نحصل على معادلة حركة النظام بالهيئه.

$$\ddot{\varphi} + \frac{h}{(m+m_\ell)\ell^2}\dot{\varphi} + \frac{(m+m_\ell)g\ell + cd^2}{(m+m_\ell)^2\ell^2}\varphi = 0. \qquad (5)$$

عند البحث عن الشروط الأبتدائيه للحركه من الضروري حساب طبيعة التأثير المتبادل للاطلاقه مع النواس. هذا التأثير المتبادل هو تأثير التصادم، خلال زمن تباطؤ الاطلاقه في الثقل تهمل توقعها النهائي بالنسبة له خلال هذا الفاصل الزمني كان الثقل عمليا غير مزاح، ولذلك

$$\varphi(0) = 0 . \qquad (6)$$

السرعه الأبتدائيه لحركة المذبذب يمكن إيجادها بأستخدام قانون حفظ عزم كمية الحركه لنظام المذبذب - الاطلاقه :

$$m v \ell = (m + m_\ell)\ell \dot{v}(0) ,$$

حيث $\dot{v}(0) = \ell\dot{\varphi}(0)$ ــ السرعه الابتدائيه الخطيه لحركة الثقل مع الاطلاقه المقذوفه فيه بصوره مباشره بعد التصادم . لذلك

$$\dot{\varphi}(0) = \frac{m}{(m + m_\ell)\ell} v . \qquad (7)$$

حل المعادله (5) طبقا للصياغه [ 2.80 ] آخذين الظروف الابتدائيه (6) ، (7) بنظر الاعتبار يمتلك الهيئه .

$$\varphi(t) = e^{-\beta t} \frac{m v}{(m + m_\ell)\ell w} \sin wt , \qquad (8)$$

حيث

$$w = \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{c d^2}{(m + m_\ell)\ell^2} - \frac{h^2}{4(m + m_\ell)^2 \ell^4}} . \qquad (9)$$

المحدد اللوغاريتمي للنظام وحسب المعادلتين [2.30] (2.31) يساوي

$$\lambda = \frac{h}{2(m + m_\ell)\ell^2} \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi h}{\sqrt{4(m + m_\ell)^2 \ell^3 g + 4(m + m_\ell)\ell^2 c d^2 - h^2}}$$

**تحليل الحل :**

كتابة الحل بالهيئه (8) يكون ملائما إذا كان النظام فعلا نظاما إهتزازيا . أي أن $w$ عدد حقيقي . وهذا يمتلك مكانا عند

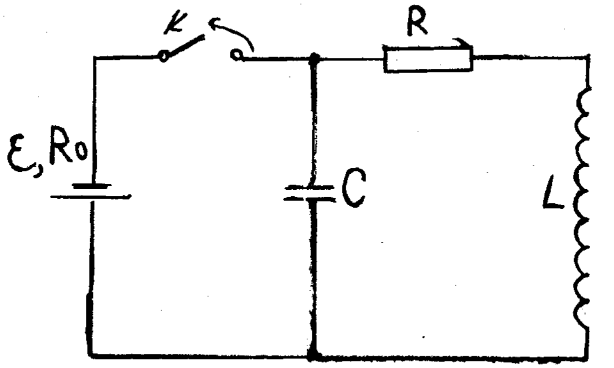
$$\frac{h^2}{4(m + m_\ell)^2 \ell^4} < \frac{g}{\ell} + \frac{c d^2}{(m + m_\ell)\ell^2} . \qquad (10)$$

اذا كان الشرط (10) غير متحققاً ، لذلك فان الحركة في النظام متباطئه وحلها يمكن بحثه في المعادله (2.89) . بامكان الطالب ان يحل السؤال تحت شرط ان يستعاض عن الاطلاقه بكره صغيره مرنه . تصادم هذه الكره مع الثقل ، $m_\ell$ يعتبر تصادما مرنا مطلقا ومركزيا .

**مثال 4**

بناء كهربائي متوالي يتكون من مكثف بسعة $C$ ، ملف حث $L$ ومقاومه أوميه $R$.

ربط المكثف الى مصدر مستمر $\mathcal{E}.\mathcal{D}.C$ بمقاومه داخليه $R_0$ (لاحظ الشكل 2.13).




شكل 2.13 .

أوجد هيئه الذبذبات الخاصه الناتجه في الدائره الكهربائيه بعد قطع المصدر $\mathcal{E}.d.C$ تحت الشروط التاليه :

$$1)\ R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}\ ;\ 2)\ R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}\ ;\ 3)\ R = 2\sqrt{L/C}$$

**الحل :** بأستخدام قاعدة كيرشوف

نصيغ معادلة ذبذبات التيار $i$ في الدائره بعد قطع المصدر $\mathcal{E}.\mathcal{D}.C$ .

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = 0 . \qquad (1)$$

بمفاضله هذه المعادله ، نحصل على معادله من نوع (2.78) حيث

$$\xi = i\ ;\ \beta = R/2L\ ;\ \omega_0^2 = 1/LC$$

نحدد الظروف الابتدائيه . قبل قطع المصدر $\mathcal{E}.\mathcal{D}.C$ .
كان يمر عبر الملف تيار

$$i(0) = \mathcal{E}/R + R_o \qquad (2)$$

وجهد على المكثف

$$U_c(0) = \frac{R}{R+R_o}\mathcal{E} \qquad (3)$$

التيار الجاري عبر الملف، والجهد على المكثف لا يستطيعان أن يتغيروا بصورة قفزيه، لأنه مع هذه الكميات يرتبط على التوالي طاقة المجال المغناطيسي للملف وطاقة المجال الكهربائي للمكثف ، لذلك تبقى المقادير $i(0)$ و $U_c(0)$ محتفظة بقيمها في الفتره ما قبل بدء عمليات الذبذبات الخاصة ، ويحسبان بالمعادلتين (2) ، (3) .

بما ان : $i(0)R = U_c(0)$ ، لذلك فان هبوط الجهد على الملف

$$L\frac{di}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \qquad \text{و} \qquad \frac{di}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \qquad (4)$$

عند حل المعادله (2.78) بهذا الشكل من الضروري حساب الظروف الابتدائيه (2) ، (4) . 1) اللا متساويه $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ تكافئ اللا متساويه $B < \omega_o$ لذلك فان حل المعادله (2.78) يجب بحثه بالهيئه (2.79) أو (2.81) . بتعويض الشروط (2) ، (4) في المعادله (2.81) نحصل

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R+R_o}\left(\cos\omega t + \frac{R}{2L\omega}\sin\omega t\right)\exp\left(-\frac{R}{2L}t\right),$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

حيث

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

2) عند $R > 2\sqrt{L/C}$ وبالتالي ، $\beta > \omega_0$ تصبح الحركه متباطئه (متراخيه) ، وقانونها نحصل عليه بتعويض الظروف الابتدائيه (2) ، (4) في المعادله (2.79) وحساب الجذرين $\lambda_1$ ، $\lambda_2$ من المعادله (2.26)

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{2(R+R_0)K}\left[\left(\frac{R}{2L} + K\right)\exp Kt + \right.$$

$$\left. + \left(K - \frac{R}{2L}\right)\exp(-Kt)\right]\exp\left(-\frac{R}{2L}t\right). \quad (5)$$

حيث

$$K = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\ .$$

3) عند $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ يؤول المقدار $K$ الى الصفر . في هذه الحاله $i(t)$ يمكن ان يوجد كحد حرج ، تقترب اليه المعادله (5) عند $K \to 0$

$$\lim_{K \to 0} i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R+R_0}\exp\left(-\frac{R}{2L}t\right).$$

بالنسبة للحاله 1ـ اوجد قانون تغيّر الجهد على المكثف $U_C(t)$ والمكثف $U_L(t)$ ، مفترضا ان المقاومه الداخليه للمصدر $\mathcal{E}.\mathcal{D}.C$ تساوى صفر .

## §9. العمليات الانتقاليه والذبذبات المستقامه في الانظمه بدرجة حريه واحده

في الانظمه الخطيه يمتلك تراكب الحركه مكانا هاماً ، حيث ان كل تاثير على النظام يسبب رد فعل مستقل عن التاثيرات الاخرى (مبدأ التراكب) .

بالامكان تمييز صنفاً خاصاً من المسائل التي تتحدد فيها القوى المؤثره على الانظمه بدوال دوريه .

$$f(t)=f(t+nT) \qquad (2.90)$$

عند

$$-\infty < t < +\infty \qquad (2.91)$$

حيث $n$ – اى عدد صحيح ، $T$ كمية ثابته تسمى الدور او زمن الذبذبه . ولكن يجب ان ناخذ في حسابنا ان مثل هذه الوضعيه تصبح مقربه . عمليا في الانظمه الحقيقيه قبل لحظة تسليط القوه $t_1$ ، $f(t)=0$ . لذلك فان الفاصل الزمني (2.91) يجب ان يستعاض عنه بالتعبير التالي :

$$t_1 \leq t < +\infty \qquad (2.92)$$

بنتيجة ذلك فان الحل $\chi(t)$ للمعادله التفاضليه التي تصف الحركه المبحوثه سيكون بالهيئة التاليه :

$$\mathcal{D}(x, \dot{x}, \ddot{x}) = f(t) , \qquad (2.93)$$

حيث $f(t)$ تحقق الشرط (2.90) في الفاصل الزمني (2.92) . هذا الحل يتجزأ دائما الى حل عام للمعادله المتجانسه $\chi_1(t)$ وحل خاص للمعادله غير المتجانسه $x_2(t)$ اى ان

$$x(t) = \chi_1(t) + \chi_2(t) .$$

في الانظمه الفعاله يسبب تشتت الطاقه نقصان الحد $x_1(t)$ ، الذى يمثل الذبذبات الخاصه والمرافقه للنظام . هذه العمليه تسمى عملية استقامة الذبذبات الاضطراريه $x_2(t)$ .

عندما الحد $x_1(t)$ بدرجة من الدقه يمكن اهماله بالمقارنة مع $x_2(t)$ حينذاك يصبح بالامكان اعتبار الذبذبات الاضطراريه مستقامه .

يمكن ايجاد الذبذبات الاضطراريه او القسريه المستقامه بتعويض الشرط (2.92) بالشرط (2.91) اى اعتبار $f(t)$ داله دوريه دقيقه .

1 . طريقة التحليل التوافقي (الهرموني) لفوريه

يمكن استخدام مختلف اساليب الحل للمسائل المتعلقه بالذبذبات القسريه تحت تاثير قوى خارجيه دوريه .

جوهر هذه الطريقه الطيفيه يكمن في تحليل الداله الدوريه $f(t)$ الى مركبات توافقيه منفرده (توافقيات او هرمونيات ) ومن ثم ايجاد استجابة او رد فعل النظام الخطي على كل توافقي بصورة منفرده .

النتائج المحصله تجمع على اساس مبدا التراكب .

تحليل الداله الدوريه $f(t)$ الى مركبات توافقيه (في مسلسل فوريه ) يتحقق بالمعادلات التاليه :

$$f(t) = A_o + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t), \quad (2.94)$$

حيــث

حيــث

$$A_o = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, dt \quad (2.95)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega t\, dt , \quad (2.96)$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega t\, dt , \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.97)$$

بهيئــة اخــرى

$$f(t) = C_o + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \alpha_n), \quad (2.97)$$

حيــث

$$C_o = A_o , \quad C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad (2.98)$$

$$tg\, \alpha_n = - B_n / A_n . \quad (2.99)$$

فــي الهيئــه المعقــده

(2.109)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \tilde{A}_n e^{jn\omega t}$$

هنا وفي كل مكان $j = \sqrt{-1}$

حيث $$\tilde{A}_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-jn\omega t}\, dt. \quad (2.101)$$

الكميه $\tilde{A}_n$ تسمى السعة المعقده للمركبه الهرمونيه برقم $n$ و $\tilde{A}_n$ ترتبط مع $A_n$ و $B_n$ بالمعادله

$$\tilde{A}_n = \frac{1}{2}(A_n - jB_n). \quad (2.102)$$

2. **طريقة السعه المعقدة.** عند حل المسائل المتعلقه بالذبذبات الاضطراريه فان استخدام السعه المعقده يساعد على استبدال المعادله التفاضليه للحركه جبريا : خلال ذلك فان المضروب الزمني لكل مركبه هرمونية يمكن اختصاره . لغرض الانتقال الى السعه المعقده تكتب الهيئه المثلثيه للذبذبه

$$X = A\cos(\omega t + \alpha)$$

بهيئه معقده :

$$\overset{*}{X} = Ae^{j\alpha}\cdot e^{j\omega t} = \tilde{A}\, e^{j\omega t}. \quad (2.103)$$

السعه المعقده $\tilde{A} = Ae^{j\alpha}$ تحتوي بهذا الشكل معلومات حول سعة وطور الذبذبه بتردد $\omega$. تحوير المعادله التفاضليه جبرياً يجري حسب الخطوات التاليه :

1) عملية المفاضله $\overset{\circ}{X}$ تعوّض بالضرب في $j\omega$ للسعه المعقده $\tilde{A}$

$$\overset{\circ}{X} \longrightarrow j\omega\tilde{A}, \quad (2.104)$$

حيث $\omega$ - تردد الذبذبه الاضطراريه ، الذي يتطابق مع تردد ذبذبة القوى الخارجيه .

2) عطية التكامل تتعوض بالقسمه على $j\omega$

$$\int x\,dt \longrightarrow \frac{\tilde{A}}{j\omega} . \qquad (2 \cdot 105)$$

بنتيجة حل المعادله الجبريه للحركه أو لنظام مثل هذه المعادلات فان السعه المعقده المبحوثه للذبذبه الاضطراريه ( $\tilde{A}$ ) يعبر عنها عبر سعة ذبذبة القوه الخارجيه كالتالي :

$$\tilde{A} = K(j\omega)F . \qquad (2 \cdot 106)$$

هنا $K(j\omega) = r + js$ ← الخصوصيه الترددية المعقده للنظام ، أو بعبارة أخرى دالة التردد ، بينما $r$ و $s$ ← معاملات تتحدد بمقاييس النظام ، سعة الذبذبات الاضطراريه المبحوثه

$$A = |\tilde{A}| = F\sqrt{r^2 + s^2} . \qquad (2 \cdot 107)$$

ازاحة الطور بين الذبذبات الاضطراريه $x(t)$ و ذبذبات $f(t)$ هي :

$$\alpha = arctg\left(\frac{s}{r}\right) . \qquad (2 \cdot 108)$$

التعبير (108) يحدد الطور $\alpha$ من الدقه الى $\pi$ . اختيار المقدار الصحيح لازاحة الطور $\alpha$ في كثير من المسائل لا يسبب اية صعوبات . اذا كان هذا الاختيار ليس واضحا جدا ، عند ذلك يجب حساب $Sin\alpha = \frac{s}{(r^2+s^2)^2}$

، $\cos\alpha = \frac{r}{(r^2+s^2)^2}$ و

كل على إنفراد ، أو بناء تخطيط اتجاهي . بناء التخطيط الاتجاهي يعني من حيث الجوهر حلا بيانيا لنظام المعادلات بالنسبة للسعه المعقده . كل سعه معقده $\tilde{A} = Ae^{j\alpha}$ تتصور على التخطيط الاتجاهي، بمتجه ، الذي قيمته المطلقه $A$ واتجاهه الذي يضع الزاويه $\alpha$ مع الشعاع المعبر عن بداية الحساب ( $\alpha = 0$ ).

بالتوافق مع النظام المحلول للمعادلات الجبريه تجري بيانيا عملية جمع أو طرح المتجهات على التخطيط الاتجاهي . عند بناء التخطيط الاتجاهي من الضروري استخدام القواعد التاليه :

1) ضرب السعه المعقده $\tilde{A}$ في $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ يتوافق مع دوران المتجه الممثل ب $\tilde{A}$ الى الامام على زاويه $\pi/2$ ؛

2) تقسيم السعه المعقده $\tilde{A}$ على $j$ ( $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ ) يتوافق مع دوران المتجه الممثل ب $\tilde{A}$ ، الى الخلف على زاويه $\frac{\pi}{2}$ .

1 في العاده يعبر عن الاتجاه الموجب بالاتجاه المضاد لحركة عقارب الساعه ،

الطريقه الطيفيه هي احدى الطرق الناجعه المستخدمه لحساب الحركات الانتقاليه والحركات المستقامه ، اى التي استقامت بفضل تاثير قوه خارجيه دوريه .

هذه الطريقه تعوض ( او تنوب عن ) العمليات المجراة على الدوال الزمنيه بعمليات تجرى على صور هذه الدوال . بعد حل المسأله يجرى في فضاء الصوره انتقال معاكس او عوده للاصل ( للداله الزمنيه ) . الانتقال من اصل الداله $f(t)$ الى صورتها يجرى طبقا لقاعدة تحويل لبلاس المباشر .

$$F(P)=\int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt . \qquad (2.109)$$

عند الشرط ، ان $f(t)=0$ لـ $t<0$ .

يرمز لهذا التحويل بالرمز

$$F(P) \doteq f(t) \qquad (2.110)$$

نذكر الصفات الاساسيه لتحويلات لبلاس التي معرفتها ضروريه لحل المسائل قيد البحث .

1 . خطية التحويل

$$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t) \doteq \alpha F_1(P)+\beta F_2(P) ,$$
$$(2.111)$$

حيث $\alpha$ ، و $\beta$ معاملات غير معتمده على الزمن

2) عملية مفاضلة الاصل .

$$\frac{df}{dt} \doteq -f(+0)+pF(p) \qquad (2.112)$$

حيث $f(+0)$ - مقدار $f(t)$ عند اقتراب $t$ الى الصفر من جانب المقدار الموجب لل $t$ .

$$\frac{d^n f}{dt^n} \doteq p^n F(p) - p^{(n-1)} f(+0) - p^{(n-2)} \frac{df}{dt}(+0) - \cdots$$

$$- p\frac{d^{(n-2)}f}{dt^{(n-2)}}(+0) - \frac{d^{(n-1)}f}{dt^{(n-1)}}(+0) \qquad (2.113)$$

3) عملية التكامل تحت الشرط : $f(+0) = 0$

$$\int_0^t f(t)\,dt \doteq \frac{F(p)}{p} \qquad (2.114)$$

4) بديهية التحليل : اذا كان صورة الداله $f(t)$ ، تمتلك الهيئه :

$$f(t) \doteq F(p) = \frac{U(p)}{V(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \cdots + b_0},$$

حيث $m<n$ ، اضافة الى ان المعادله $V(p) = 0$ تمتلك فقط جذورا بسيطه وليس هناك اي من هذه الجذور لا يساوي صفر ، لذلك

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{U(p_k)}{V'(p_k)} e^{p_k t}, \qquad (2.115)$$

حيث $p_k$ - الجذر $k$ لمتعدد الحدود $V(p)$ ،

بينما $$V'(p_k) = \left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_{p=p_k}.$$

اذا كان احد جذور $V(p)$ يساوي صفر ،لذلك عند وضع $V(p) = pW(p)$، نجد ان :

$$f(t) = \frac{U(0)}{W(0)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{U(p_k)}{p_k W'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (2.116)$$

5) بديهية ضرب الصور ( بديهية الحُزم ) :

افرض ان : $X(p) \doteqdot x(t), \quad Y(p) \doteqdot y(t).$

حينذاك $$X(p)Y(p) \doteqdot \int_0^t x(\theta)y(t-\theta)d\theta. \quad (2.117)$$

تكامل مثل هذا النوع يسمى داله حزميه ل $x(t)$ و $y(t)$ . صورة التكامل

$$\int_0^t \frac{df(\theta)}{d\theta} h(t-\theta)d\theta + f(0)h(t) \doteqdot pH(p)F(p). \quad (2.118)$$

مثل هذا التكامل يحمل اسم تكامل ديواميل .

6) بديهية التخلف : صورة الداله $f(t-\tau)$ عند $t > \tau \geq 0$ يترتبط مع تمثيل الدالة $f(t) \doteqdot F(p)$ بالعلاقه

$$f(t-\tau) \doteqdot e^{-p\tau}F(p). \quad (2.119)$$

7) قاعدة ايجاد صورة الداله الدوريه :

$$f(t) = f(t+nT) \doteqdot F_n(p),$$

$$F_n(p) = \frac{\Psi(p)}{1-e^{-pT}}, \quad (2.120)$$

حيث $\psi(p)$ – صورة الدالة المساعدة

$$\psi(t)=f(t)-f(t-T)\ ,$$

اى ان

$$\psi(t)=\begin{cases}0 & \text{عند } t<0\\ f(t) & \text{عند } 0\leq t\leq T\\ 0 & \text{عند } t>T.\end{cases}$$

والعكس صحيح .

اذا كانت صورة بعض الدوال $f(t)$ تمتلك الهيئة (2.12 0) ، حيث الاصل $\psi(t)$ يؤول الى الصفر عند $t>T$ ، فان $f(t)$ – هي داله دوريه بدور $T$. دور واحد $0<t<T$ تتطابق الداله ، .

هذه الصفه للصوره تستخدم لبحث عمليات الاستقامه في حالة التاثير الدوري .

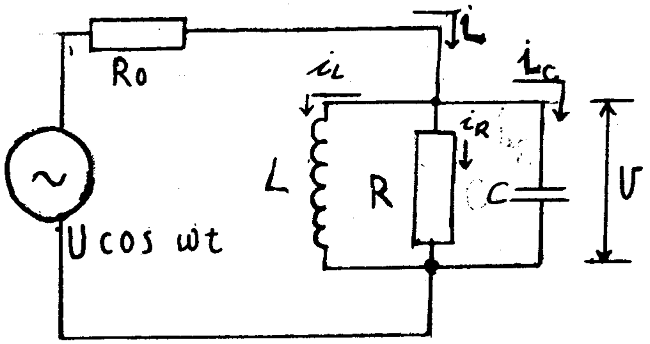
مثال 5 :

في السلسله الكهربائيه الموضحه في (الشكل 2.14)

ربط مولد جهده $u = U\cos wt$ .

اوجد سعات واطوار ذبذبات الجهد $v$ والتيارات $i_L$ ، $i_C$ .

ارسم تخطيطا اتجاهيا للتيارات والجهود .




شكل 2.14

الحل : نظام المعادلات التفاضليه المكون حسب

قاعدة كيرشوف للتخطيط ، الموضح على الشكل

اعلاه يمتلك الهيئه

نكتب نظام المعادلات هذا بالنسبة للسعة المعقد ه مستخدمين المعادله (2.104) والمعادله (2.105)

$$\tilde{J} = \tilde{J}_L + \tilde{J}_R + \tilde{J}_C \; ,$$

$$j\omega L \tilde{J}_L = \tilde{V}$$

$$R \tilde{J}_R = \tilde{V} \; , \qquad (2)$$

$$\frac{1}{j\omega C} \tilde{J}_C = \tilde{V} \; ,$$

$$\tilde{U} = \tilde{J} R_0 + \tilde{V} \; .$$

حل النظام بالنسبة الى $\tilde{V}$ ، $\tilde{J}_L$ و $J_C$ وملاحظة ان السعه المعقده $\tilde{U} = U$ ، نجد

$$\tilde{V} = \Big[ \omega^2 L^2 R (R_0 + R) + \qquad (3)$$

$$+ j\omega L R^2 R_0 (1 - \omega^2 LC) \Big] \frac{U}{A} \; ,$$

$$\tilde{J} = \Big[ R^2 R_0 (1 - \omega^2 LC) - j\omega L R (R_0 + R) \frac{U}{A} \; , \qquad (4)$$

$$\tilde{J}_C = \left[-\omega^2 LCR^2R_o(1-\omega^2LC) + \right.$$
$$\left. + j\omega^3L^2CR(R_o+R)\right]\frac{U}{A}, \qquad (5)$$

حيث

$$A = R^2R_o^2(1-\omega^2LC)^2 +$$
$$+ \omega^2L^2(R_o+R)^2.$$

التعابير (5)←(3) تحولت الى الهيئه (2.106) .
لتحديد سعات الذبذبات $V$ ، $\tilde{J}_L$ و$J_C$ نستخدم
المعادله (2.107) :

$$V = \frac{\omega LRU}{\sqrt{A}}, \qquad (6)$$

$$J_L = \frac{1}{\omega L}V, \quad J_C = \omega CV. \qquad (7)$$

اما فيما يخص علاقات التوافق بين الجهد $U$ وبين

اطوار الذبذبات $v$ ، $i_L$ و $i_C$ - $\alpha$ ، $\alpha_L$ و $\alpha_C$
على التوالي بالنسبة الى ذبذبات الجهد $U$ نجدها
بأستخدام المعادله (2.108)

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{RR_o(1-w^2LC)}{wL(R_o+R)}, \quad (8)$$

$$\alpha_L = \operatorname{arctg}\left[-\frac{(wL(R_o+R)}{RR_o(1-w^2LC)}\right], \quad (9)$$

بالنسبة الى $\alpha_C$ فيمكن الحصول على تعبير يتطابق مع المعادله (9) . ولكن ذلك لحد الآن لا يعني ان $\alpha_C = \alpha_L$ .

في الحقيقيه أن الجهد $v$ هو جهد عام بالنسبة الى طف الحث $L$ والمكثف $C$ .
التيار عبر الحثيه $L$ يتأخر بالطور عن $v$ بمقدار $\frac{\pi}{2}$ . أما تيار المكثف $C$ فهو يتقدم بالطور على الجهد العام $v$ بمقدار $\frac{\pi}{2}$ . لذلك فان الطورين $\alpha_L$ ، $\alpha_C$ يختلفان مع بعضهما بمقدار $\pi$ .
انتخاب مقادير $\alpha_L$ ، $\alpha_C$ يساعد في بناء التخطيط الاتجاهي ( شكل 2.14)
نفرض أن $w^2 > \frac{1}{LC}$ .

الارقام داخل الاقواس تشير الى ترتيب تمثيل المتجهات على التخطيط .

الاول في الاتجاه المنتخب ينبني بالجهد $\tilde{V}$ .

بعد ذلك ينقل متجه السعه المعقده $\tilde{I}_L$ ، المزاج الى الخلف بالنسبة الى $\tilde{V}$ على زاويه $\frac{\pi}{2}$ ،

لان

$$\tilde{I}_L = \frac{1}{jWL}\tilde{V} .$$

القيمة المطلقه لهذا المتجه تساوي $\frac{|\tilde{V}|}{WL}$ .

البناء الثالث هو المتجه $\tilde{I}_C$ ، المزاج الى الامام بالنسبة الى $\tilde{V}$ بمقدار $\frac{\pi}{2}$ ،

لان

$$\tilde{I}_C = j\omega\tilde{V} .$$

القيمه المطلقه لهذا المتجه هي $WC|\tilde{V}|$

المتجه الرابع $\tilde{I}_R = \frac{1}{R}\tilde{V}$

يتطابق بالاتجاه مع $\tilde{V}$ ، لان التيار $i_R$ والجهد $v$ على المقاومه الفعاله $R$ يتذبذبان في الطور (لهما نفس الطور) .

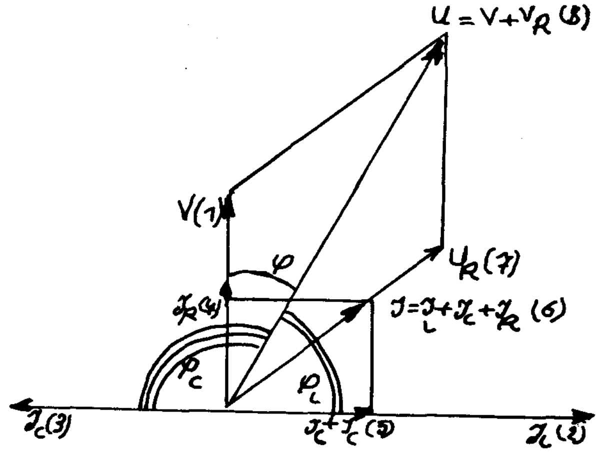
بعد ذلك بيانيا نجد مجموع المتجهات :

$$\tilde{I}_L + \tilde{I}_C = \tilde{I} .$$

متجه الجهد $\tilde{U}_R = R\tilde{J}$ يتطابق بالاتجاه مع $\tilde{J}$ ،
لان $R_0$ — مقاومه فعاله . مجموع المتجهات

$$\tilde{V} + \tilde{U}_R = \tilde{U}$$

اذا ثبتت اثناء البناء المقاييس المختاره بالنسبة للتيارات والجهود ، فان مقادير الزوايا المبحوثه $\alpha_C$ و $\alpha_L$ يمكن ان تقاس مباشرة من التخطيط .




شكل 2.15

عند $\omega^2 > \frac{1}{LC}$ ،فان ذبذبات التيار $i_C$ تتقدم ، بينما ذبذبات التيار $i_L$ تتاخر عن ذبذبات الجهود $V$ و $U$ .

تحليل الحل . التعبير ( 7) يساعد على ايجاد التردد $\omega_0$، الذي عليه تتساوى سعات ذبذبات التيارين $i_C$ و $i_L$.عند مساواة الاطراف اليمنى للمعادله (7) نجد

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

على الترددات الاهتزازيه :

$\omega > \omega_0$ ، فان $|\tilde{J}_L|$

تزيد عن $|\tilde{\mathcal{J}}_C|$ ، والمقاومه العامه للدائره تمتلك خاصيه حثيه . على الترددات $\omega > \omega_0$ ، فان $|\tilde{\mathcal{J}}_C| > |\tilde{\mathcal{J}}_L|$ وطبيعة مقاومه الدائره تصبح طبيعة سعتيم

نعوض في المعادله (8) ، $\omega = \omega_0$ ، من السهوله ان نتأكد ، أن على هذا التردد تصبح $\alpha = 0$ ، اي ان المقاومه المكافئه للدائره فعاله خالصه .

تعويض المقدار $\omega_0$ في المتساويات (6) ،(7) و (9) يعطي

$$V\Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{R}{R_0 + R}\, U = R\,\mathcal{J} \,.$$

$$\mathcal{J}_L\Big|_{\omega=\omega_0} = R\sqrt{\frac{C}{L}}\;\mathcal{J} = Q\,\mathcal{J} \,,$$

$$\mathcal{J}_C\Big|_{\omega=\omega_0} = R\sqrt{\frac{C}{L}}\;\mathcal{J} = Q\,\mathcal{J} \,,$$

$$\alpha_L = -\frac{\pi}{2}, \qquad \alpha_C = +\frac{\pi}{2} \,.$$

الكميه $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$

تسمى جودة النظام الاهتزازي للدائره المتوازيه .

على التردد $\omega_0$ تزيد سعات ذبذبات التيارات $i_L$ ، $i_C$ بـ $Q$ من المرات عن سعات ذبذبات التيار في السلسله الخارجيه $i$ .

تمو سعات ذبذبات التيارات في فروع الدائره الاهتزازيه المتوازيه عند اقتراب تردد ذبذبات التيار في السلسله الخارجيه الى التردد الخاص للدائره يحمل اسم رنين التيارات .

في الدائره المثاليه بدون فقدان ( $R = \infty$ ) تنمو مقادير $I_L$ و $I_C$ على التردد $\omega_0$ بدون حدود .

مثال : 2

في دائره اهتزازيه متواليه ذات تردد خاص $\omega_0$ وجودة $Q=20$ ربط مولد جهده $u(t)$ (شكل 2.16)

الجهد

$$u(t) = U \cos \omega t$$

عند

$$\frac{4K-1}{2}\,\frac{\pi}{\omega} \le t \le \frac{4K+1}{2}\,\frac{\pi}{\omega}$$

حيث $K$- اي عدد صحيح .

خارج هذا المدى الزمني $u(t)=0$ ( لاحظ الشكل 2.17 ) .

اوجد علاقة سعات التوافقي الثاني الى الاول لذبذبات الجهد على المكثف عند $\omega = \frac{\omega_0}{2}$ .

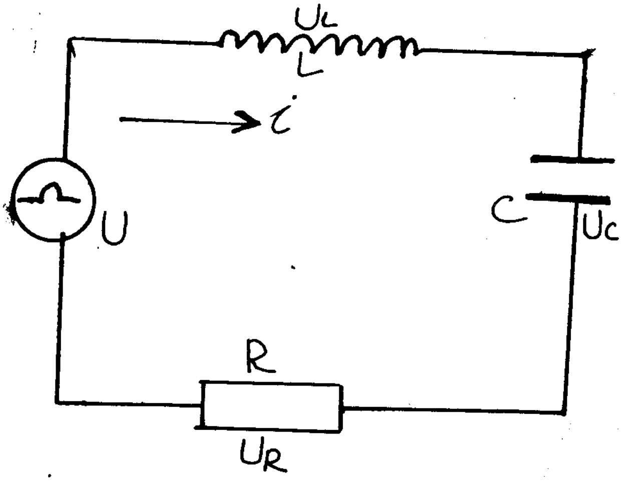
الحل : نرتب الداله $u(t)$ بصيغة التحولات (2.96) و (2.97) نجد معاملات سلسل فوريه (2.94)

$$A_1 = \frac{2U}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos^2 \omega t \, dt = \frac{1}{2} U . \qquad (1)$$

حـدود التكـامـل ( $+\frac{T}{2}$ ÷ $-\frac{T}{2}$ ) ثـم تعـويضهـا فـي

(1) بـ ( $+\frac{T}{4}$ ÷ $-\frac{T}{4}$ ) ، لانـه خـارج هـذه الاخيـره

$u(t)=0$

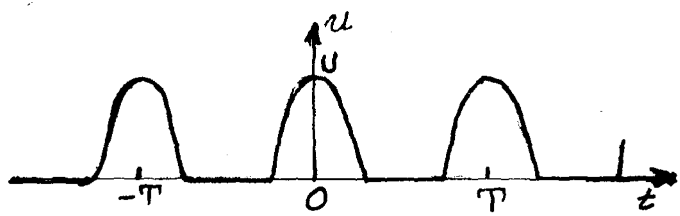



شـكـل 2.16

$$A_n = \begin{cases} U \dfrac{2n}{2(n^2-1)\pi} & \text{عند } n \text{ زوجيه} \\ 0 & \text{عند } n \text{ فرديه ( ماعدا } n=1) \end{cases} \qquad (2)$$

$B_n = 0$

ليـس مـن الضـروري تحـديـد الثـابـت $A_0$ .




شكل 2.17

من المعادله (2) ينتج ان سعتي الهرمونيك (التوافقي الاول والثاني ) $u(t)$ يساويان :

$$U_1 = 0,5\,U \qquad (3)$$

$$U_2 = \frac{2}{3\pi}U = 0,21\,U. \qquad (4)$$

عند حساب الذبذبات الاضطراريه في الدائره يمكن على اساس مبدأ التركيب (او التراكب) ، ان نبحث تاثير كل من المركبتين الهورمونيتين بصوره مستقله الواحده عن الأخرى .

لاجل هذا الغرض نستخدم طريقة السعات المعقده .

نظام معادلات كيرشوف

KIRCHHOFF.S law

للسعات المعقده للتيارات والجهد عند تاثير فقط $n$ من الجهود الهرمونيه $u(t)$ يمتلك الهيئه

$$\tilde{U}_n = \tilde{U}_L + \tilde{U}_C + \tilde{U}_R \ , \ \tilde{U}_L = jn\omega L \tilde{J}$$

$$\tilde{U}_C = \frac{1}{jn\omega t}\tilde{J} \ , \ \tilde{U}_R = R\tilde{J} \ .$$

بحل هذا النظام بالنسبة الى $\tilde{U}_C$ ، نحصل

$$\tilde{U}_C = \frac{(1-n^2\omega^2 LC) - jn\omega CR}{(1-n^2\omega^2 LC)^2 + n^2\omega^2 C^2 R^2}\tilde{U}_n .$$

على اساس المتساويه (2.107) ترتبط المتسعات $U_{cn}$ و $U_n$ بالعلاقه

$$U_{Cn} = \left[(1-n^2\omega^2 LC)^2 + n^2\omega^2 C^2 R^2\right]^{-\frac{1}{2}} U_n \ . \qquad \ldots(5)$$

من شرط المسأله $\omega = \frac{\omega_0}{2}$ .

هذا يعني أنه لاجل ايجاد العلاقه المبحوثه عنها $U_{C2} / U_{C1}$ يجب تعويض $(0.5\omega_0)$ و $\omega_0$ محل

$nw$ في المعادله ( 5 ) .

في النتيجه نحصل

$$\frac{U_{C2}}{U_{C1}} = \sqrt{\frac{(1-0{,}25\omega_0^2 LC)^2 + 0{,}25\omega_0^2 C^2 R^2}{(1-\omega_0^2 LC)^2 + \omega_0^2 C^2 R^2}}\ \frac{U_2}{U_1}$$

التردد الخاص للبناء الكهربائي المتوالي

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad (7)$$

اما جودة هذا البناء فهي

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad (8)$$

بتعويض المقادير (7) و ( 8 ) وكذلك ( 3 )، و ( 4 ) في ( 6 ) ، نحصل بصوره نهائيه

$$\frac{U_{C2}}{U_{C1}} = \frac{0{,}21}{0{,}5}\sqrt{(0{,}75)^2 Q^2 + 0{,}25} \cong 0{,}32Q .$$

من ذلك ينتج انه عند $Q = 20$ فان

$$U_{C2} = 6{,}4 U_{C1} .$$

**تحليل الحل :** النتيجه المحصله تشير، ان النظام الموضح على الشكل 2.16 يحقق دور محلل طيف الجهد ( $u(t)$

وبغض النظر من أن سعة الهرمون الثاني $U_{C_2}$ أقل تقريبا أقل بمرتين من سعة الهرمون الاول .

فعند بناء الدائره وضبطها على الهرمون الثاني

$$\omega_0 = 2\omega_1$$

فان سعة ذبذبات هذا الهرمون في الدائره أكبر بستة مرات من سعة الهرمون الاول .

الصفات الفلتريه لهذا البناء الكهربائي ، تتحسن برفع مستوى جودته .

بامكان الطالب ان يحسب العلاقة $\frac{U_{C_4}}{U_{C_2}}$ عند الشرط ، ان: $\omega_0 = 4\omega$ ، بينما $Q = 100$ .

## اسئلة الفصل

س1: زمن ذبذبه مخمده 4 Sec. ، المحدد اللوغاريتمي للخمود (6 و 1) الطور الابتدائي يساوي صفر .
ازاحة النقطة عند $t = \frac{T}{4}$ تساوي 4,5 Cm .
1) أكتب معادلة حركة هذه الذبذبه
2) ارسم منحني الحركة الاهتزازيه هذه بحدود ذبذبتين .

س2: ارسم منحني الذبذبه المخمده ، التي معادلتها تعطي بالهيئه

$$X = e^{-0,1t} \sin \frac{\pi}{4} t \text{ Meter}.$$

س3: معادلة ذبذبه مخمده معطاة بالهيئة $X=5e^{-0,25t} \sin\frac{\pi}{2}t$
جد سرعة النقطة المهتزه في اللحظات الزمنيه :
$0, T, 2T, 3T, 4\pi$
اذا علمت ان $(X = 5 e^{-0,25t} \sin\frac{\pi}{2}t)$ محسوبة بالمتر

س4: المحدد اللوغاريتمي للخمود لمذبذب بندولي يساوي 0،2 . جد بكم مرة تنقص سعة الذبذبه خلال ذبذبة كاملة واحده .

س5: كم يساوي المحدد اللوغاريتمي للخمود لبندول رياضي اذا نقصت سعة الذبذبه خلال دقيقة واحده بمرتين ؟
طول البندول 1 meter .

س6: بندول رياضي طوله 7 Cm و 24 ينجز ذبذبات مخمده . خلال كم من الزمن تنقص طاقة البندول بمقدار 4 و 9 مره . يحل السؤال لمقادير المحدد اللوغاريتمي للخمود التالية. 1) $\lambda = 0,01$ ; 2) $\lambda = 1$

س 7 سعة ذبذبه مخمده (او متخامده ) لبندول (اولنواس) رياضى خلال دقيقة واحده نقصت الى النصف .
بكم مره تنقص خلال ثلاث دقائق .

س 8 علق ثقل بنهاية نابض مثبت شاقوليا . خلال ذلك استطال النابض بمقدار $9{,}8\ Cm$ ، عند سحب الثقل الى الاسفل وتركه حرا ينجز حركة اهتزازية .
كم يجب ان يساوى معامل الخمود لكى :

1 ) تتوقف الذبذبات خلال $10\ sec$ . (اعتبر شرط توقف الذبذبات عندما تنقص السعه الى 1% من مقدارها الابتدائى ) .

2 ) اذا عاد الثقل الى وضع التوازن بحركة لا دوريه .

3 ) اذا كان المحدد اللوغاريتمى للخمود يساوى 6

س 9 جسم كتلته $m = 10\ g$ ينجز ذبذبات مخمده (او متخامده ) بسعة عظمى مقدارها $7\ Cm$ ، الطور الابتدائى يساوى صفر ومعامل الخمود $\beta = 1{,}6\ sec^{-1}$ ، على هذا الجسم بدات تؤثر قوة خارجيه دوريه والتى بتاثيرها استقامت الذبذبات الاضطراريه .
فاذا كانت معادلة حركة الذبذبات الاضطراريه تمتلك الهيئه

$$X = 5\ Sin(10\pi t - 0{,}75\ \pi)\ Cm$$

أوجد :

1) معادلة حركة الاهتزازات الخاصة (بمعاملات عددية )

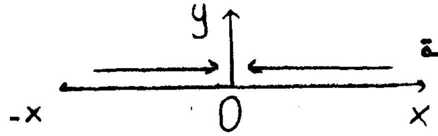
2) معادلة حركةالقوة الخارجيه الدوريه (بمعاملات عددية ) .

س10: جهاز لقياس الذبذبات الشاقوليه لهيكل طائره اوسفينة أو بنايه . هذا الجهاز يتكون من كتله $m$ مثبته بنهاية نابض معامل مرونته $C$ . ربطت هذه الكتله بمكبس صغير يتحرك داخل سائل يعمل قوة مقاومه تتناسب طرديا مع سرعة كتله $m$ (معامل التناسب $b$) . أُكسِبَتْ النهايه العليا للنابض حركة اهتزازيه طبقا للمعادله

$$y = H\cos\omega t . \qquad (1)$$

فإذا كان التردد الخاص للكتله $m$ يساوي $\omega_0$ ومعامل مقاومه السائل $B$ يشكل $\sqrt{\frac{1}{2}}$ من المقدار الحرج للخمود (عندما تؤول الذبذبات المخمده الى حركة متراخيه) .
جد سعة الذبذبات المستقلمه (الاضطراريه) للكتله $m$ التي يمكن تسجيلها على لوحة الجهاز.

س11: جسم صلب لكتلة $m$ يتحرك بموجهات (بسطوح) أفقيه ملساء تحت تأثير قوة جذب نحو المركز $O$ تتناسب طردياً مع المسافة من النقطة $O$ الى مركز عطالة الجسم (لاحظ الشكل 2.18) .
أثرت على الجسم قوة خارجية تساوي $Q = Fe^{-at}$

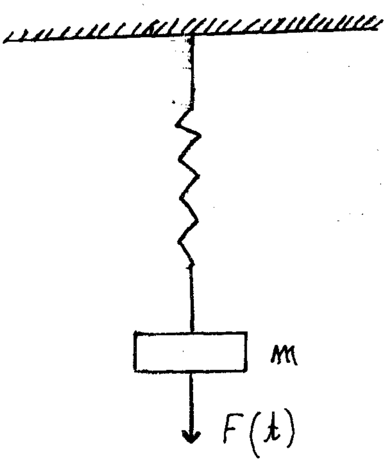



شكل 2.18

متجهه باتجاه السطوح . في بداية اللحظه الزمنيه الطبق مركز عطالة الجسم على المركز $O$ ، وسرعته ساوت صفر . جد معادلة الحركة الاهتزازيه للجسم .

س 12: جسم كتلته $m = 400g$ معلق بنهاية نابض مثبت شاقوليا . فاذا تمدد النابض بمقدار $1cm$ تحت تأثير قوه خارجيه $F = 0,4 . 10^{-5} N$ ، وكان الحد اللوغاريتمي للخمود 1,57 . جد زمن الذبذبه التي يحصل فيها الرنين .

س 13: على الثقل $m$ المعلق بنهاية نابض مثبت شاقوليا (لاحظ الشكل 2.19) . معامل مرونته $C$ ، تؤثر قوه $f(t)$ فتسحب الجسم الى الاسفل وتتغير حسب القانون




شكل 2.19

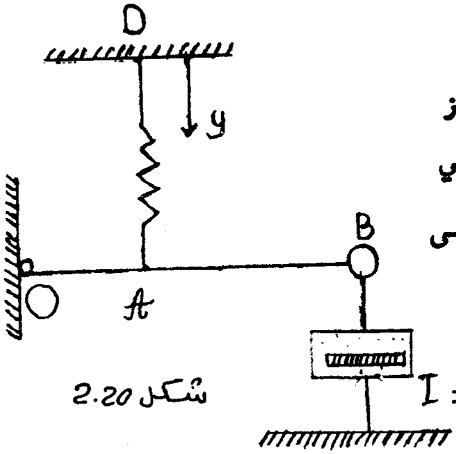
$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{عند } t < 0 \\ \alpha t & \text{عند } 0 \le t \le \tau \\ F_0 & \text{عند } t > \tau \end{cases}$$

حيث $\alpha$ - معامل ثابت

$F_0$ - قوه ثابته .

أو جد معادلة حركة الثقل اذا كانت قوة الاحتكاك المؤثره على الثقل تتناسب طرديا مع سرعته مع اهمال كتلة النابض .

س14: نظام يتكون من سلك $OB$ . في نهاية $B$ توجد كره من البلاستك مضغوطه الى النهايه $B$ . ثُبِّتَ السلك مفصلياً في النقطه 0 ( لاحظ الشكل 2.20 ) .




شكل 2.20

عزم عطالة النظام المهتز بالنسبة الى محور افقي يمر عبر 0 وعمودي على مستوى الرسم يساوي

$$I = 26,83 N.Cm.Sec^2$$

ربط الى السلك وفي النقطه A نابض معامل مرونته $C = 120 \frac{N}{Cm}$ . أما النهايه الثانيه للنابض $D$ فهي تنجز إهتزازات شاقوليه محدده طبقاً للمعادله التاليه :

$y = 0,05 \cos 6\pi t \ Cm$ . سلطت على النقطه $B$

قوة مقاومه لسائل تتناسب طرديا مع سرعة حركة النظام بمعامل تناسب $b = 0,2 N \frac{Sec}{Cm}$ .

اوجد :

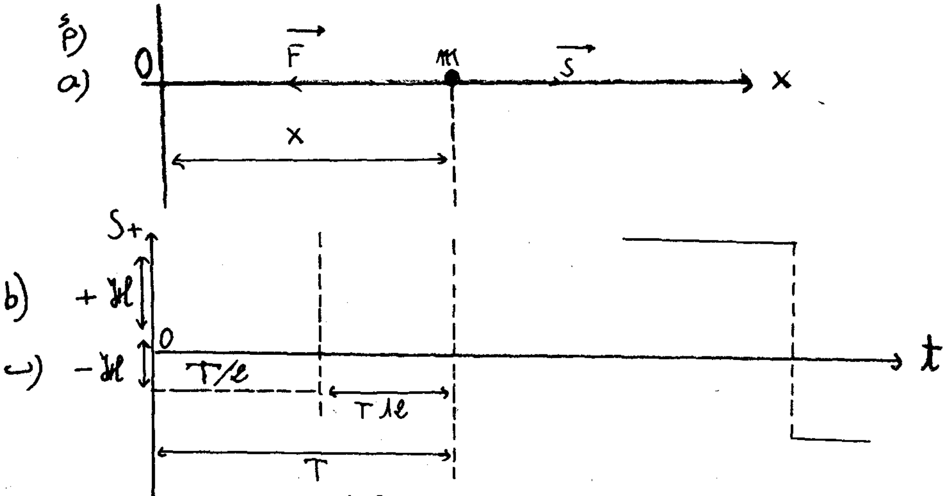
1 ) معادلة الاهتزازات الاضطراريه للدره $B$ .

2 ) أكبر تمدد للنابض .

3 ) القيمه العظمى للقوه المسلطه على النقطه $D$ .

اذا علمت أن : $OA = 10 Cm$ , $AB = 14 Cm$

س15: عنصر حساس كتلته $m$ موجود داخل جهاز كاشف Indicator هذا العنصر يتحرك بامتداد محور x تحت تاثير قوة مرونه $F$ واشاره كهربائيه $S$ ( لاحظ الشكل 2.21)



شكل 2.21

مسقط القوه $F$ على محور x يساوي $F=-CX$

حيث $C$ - معامل المرونه .

ومسقط القوه المثيره ( الاشاره الكهربائيه ) $S$ فهو مبين على المنحني (ب2.21 ) ومن المنحني . واضح أن زمن ذبذبة القوه المثيره $T$. القوه المثيره تعاني انقطاع خلال نصف زمن الذبذبه والقيمه المطلقه لها تساوي $H$ (القيمه المطلقه للقوه المثيره $|f(t)|=H$).

- اوجد معادلة حركة العنصر الحساس الذي كتلته $m$ اذا كان في بداية الزمن ساكنا .

# الفصل الثالث

# الفصل الثالث

## الاهتزازات الحره في الانظمه الخطيه بدرجتي حريه

## 1 معلومات عامه

عدد درجات الحريه يتحدد كاصغر عدد للمتغيرات المستقله الضروريه لوصف حركة النظام . في النظام الميكانيكي يمكن ايجاد عدد درجات الحريه كاقل عدد للنقاط التي يجب تثبيتها لكي تتوقف حركة النظام .

اما بالنسبة للنظام الكهربائي فالذى يقابل النقاط اللازم تثبيتها يكفي قطع الدائره الكهربائيه اذا كان التيار هو المتغير فيها او توصيل الدائره اذا كان المتغير المستقل هو الجهد المطبق .

من الضرورى ان يكون واضحا ، ان هذا التحديد لا يشمل الانظمه الحقيقيه بل النماذج المثاليه للانظمه الحقيقيه .

اى نظام حقيقي يظهر عمليا اعدادا لانهائيه لدرجات الحريه اذا حسبنا كل امكانيات الحركه فيه .

فعلى سبيل المثال : الثقل المعلق في نهاية النابض يمكن بحثه كنظام ذو درجه حريه واحده اذا هو انجز اهتزازات فقط باتجاه محور X الذي يمتد باتجاهه محور النابض .

ولكن هذا النظام يمتلك ثلاث درجات للحرية اذا حسبنا الاشكال البندوليه لاهتزازات الثقل بمستويين .

اما اذا اخذنا بنظر الاعتبار امكانية الذبذبات المرتبطه بـ لي النابض فان عدد درجات الحريه سيكون غير محدد ، اضافة الى ذلك يمكن حساب درجات الحريه الناتجه من الذبذبات

المرنه لنفس الثقل ، وكذلك ذبذبات الجزيئات التي يتكون منها الثقل . ولذلك فان تحديد عدد درجات الحريه التي يجب ان تحسبه في النظام المثالي يعتمد على طبيعة حركة الجسم الحقيقي المدروس .

كقاعده يمكن اهمال تلك الدرجات من الحريه العائده للنظام الحقيقي التي تتطابق مع الترددات التي تختلف بقوه عن ترددات الذبذبات المدروسه .

ان الاختيار الصحيح للنظام المثالي يفيد لغرض البحث النظرى ، اى يجب ان يكون هذا الجسم بسيطا وبنفس الوقت يحتفظ بالخصائص الاساسيه للنظام الحقيقي المبحوث الذى قد يمثل صعوبات كبيره في اى بحث فيزياوى .

ان الاختيار الصحيح للنظام المثالي تحدده فقط التجربه ، فكثير من الانظمه الميكانيكيه الحقيقيه والاجهزه الكهربائيه يمكن دراستها كأنظمه ذات درجتين للحريه ، مثال الانظمه الكهربائيه هو:

الاجهزه الكهربائيه الاهتزازيه المرتبطه ذات الاستعمال الشائع في التكنيك الراديوى بهيئة فلترات ، او في المقاييس الثنائيه الدوائر مثل المكبرات .... الخ

اما النظام الميكانيكي فمثاله العارضه المثبته على مسندين مرنين .

النظام ذو درجتى الحريه يمكن تصوره كنظامين منفردين بدرجة حريه واحده ، مرتبطين الواحد بالاخر . هذا الارتباط بين هذين النظامين يقود الى ان الذبذبات في أى منهما تؤثر على الذبذبات

وبالعكس ، فالنظام او الانظمه التى يمكن ان تجزء النظام المعقد اليها تسمى انظمه ثنائية ، كل منها بدرجة حرية واحده .

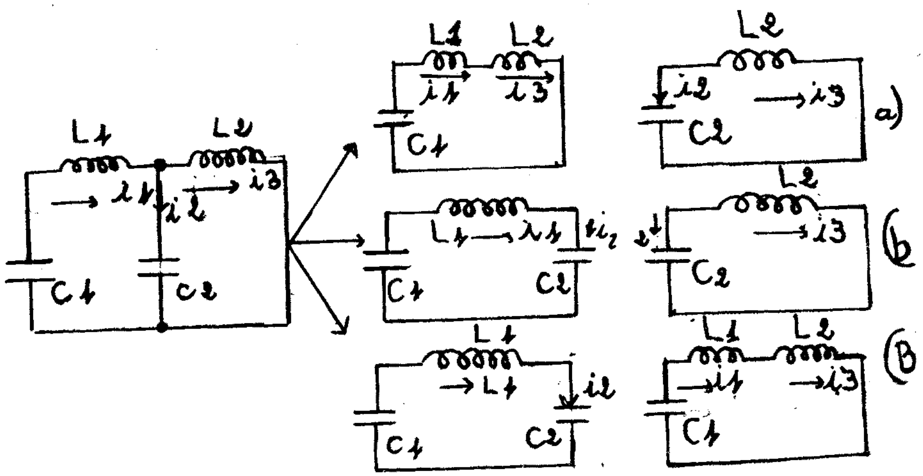
قاعدة تمييز النظام المنفرد او الانظمه الثنائيه تكمن فى ان سلوك هذا النظام يوصف باحداثى محدد ، واحد يحصل من نظام متكامل اذا جعلنا جميع الاحداثيات الاخرى مساويه للصفر .

ترددات الذبذبات الحرة للانظمة الثنائية المنفرده تسمى ترددات ثنائيه للنظام الكامل .

تجزئة النظام المعقد الكامل الى انظمه ثنائية مرتبطه يتم بعدة طرق ، وهذا معتمد على الاحداثيات المستقله التى يمكن اختيارها بهيئات مختلفة .

فعلى سبيل المثال :

الداثره الكهربائيه المرسومه بالشكل 3.1 .




شكل 3.1

ميهيئة الاحداثيات المستقلة يمكن ان نختار اي زوج من التيارات $i_1$ ، $i_2$ ، $i_3$ .

مبالنسبة للاحداثين المستقلين $i_2$ ، $i_1$ فان الترددات الثنائيه تساوي

$$\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{C_1(L_1+L_2)}} , \quad \nu_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}$$

وبالنسبة ل $i_3$ و $i_1$ فان

$$\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{L_1C_1C_2}{C_1+C_2}}} , \quad \nu_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}$$

اما بالنسبة ل $i_3$ و $i_1$

$$\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{L_1C_1C_2}{C_1+C_2}}} , \quad \nu_2 = \frac{1}{\sqrt{C_1(L_1+L_2)}} .$$

فالنظام الكامل يمكن تجزئته الى أنظمة ثنائيه ( مرتبطه ) بطرق مختلفه ولذلك فأن طبيعة الارتباط بين الانظمة الثنائيه تعتمد على اختيارها.

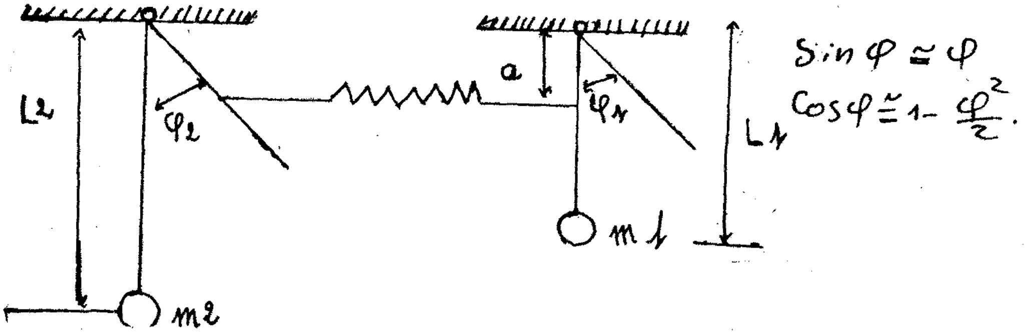
فالشكل ( أ ) 1 . 3 يمثل ارتباط حث

و ( ب ) 1 . 3 يمثل ارتباط سعة

و ( ج ) 1 . 3 يمثل ارتباط مختلط

فيزياويا واضح أن الحركه في النظام الكامل بالظروف الأبتدائيه المحددة سوف تكون واحده وهي نفسها لكل الاختيارات ولكن وصفها أو تمثيلها بواسطه احداثيات مختلفة سيكون مختلفا . نعطي مثالا كلاسيكيا لغرض دراسة الحركه الحرهأوالأهتزازات الحره في الانظمه ذات درجتي حريه هو البندولين المرتبطين

مع بعضهما البعض بنابض ويعملان اهتزازات في مستوي الرسم كما في الشكل 1 . 3 .
فاذا كانت زاويتا انحراف البندولين عن موضع توازنهما صغيرتين للغاية فان




شكل 2 . 3

لذلك فان الطاقة الحركيه والطاقة الكامنه للنظام يساويان .

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2$$

$$U = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 + \frac{1}{2}ka^2(\varphi_1-\varphi_2)^2.$$

حيث x تمثل أزاحة كل من البندولين عن وضع توازنه . فأذا كانت هذه الأزاحه صغيرة، فالتعبير بزاوية الانحراف $\varphi$ وطول كل بندول ممكن على أساس أن الازاحة x هي التي تقابل ازاحة الانحراف $\varphi$، أي أن

$$\sin\varphi = \frac{x}{L} \quad , \quad x = L\sin\varphi = L\varphi .$$

وسرعة النظام الثنائي : $\vartheta = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(L\varphi).$ •

أي أن الطاقة الحركيه والكامنه للنظام سيكونان بالصورة التاليه .

$$T = \frac{1}{2} m_1 L_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \dot{\varphi}_2^2 . \qquad (3.1)$$

$$U = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 + \frac{1}{2} k a^2 (\varphi_1 - \varphi_2)^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 L_1 g \varphi_1^2 + \frac{1}{2} m_2 L_2 g \varphi_2^2 + \frac{k a^2}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 . \qquad (3.2)$$

وذلـك لان

$$h = \frac{1}{2} L \varphi^2 = L\left(1 - \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)\right) = L(1 - \cos\varphi) .$$

$$\cos\varphi = L - h/L .$$

حيث $K$ معامل الصلاده أو معامل المرونه للنابض

أما الحد $\frac{1}{2} k a^2 (\varphi_1 - \varphi_2)^2$ :

فهو يمثل الطاقه الكامنه للنابض المضغوط، فعند معرفة الطاقه الحركيه والكامنه نستطيع أن نكتب معادلة حركة النظام بإستخدام معادلة لغرانج

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_s} + \frac{\partial U}{\partial \varphi_s} = 0 . \qquad (3.3)$$

أو :

$$m_1 L_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_1 L_1 g \varphi_1 - k a^2 (\varphi_2 - \varphi_1) = 0 . \qquad (3.4)$$

او

$$m_2 L_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 L_2 g \varphi_2 + k a^2 (\varphi_2 - \varphi_1) = 0 . \qquad (3.5)$$

فاذا عوضنا في المعادلة (3.4) ، $\varphi_2 = 0$ ، فاننا نحصل على معادلة اهتزازات النظام الثنائي الاول بالصوره التالية:

$$m_1 L_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_1 L_1 g \varphi_1 + k a^2 \varphi_1 = 0$$

$$\ddot{\varphi}_1 + \left( \frac{g}{L_1} + \frac{k a^2}{m_1 L_1^2} \right) \varphi_1 = 0$$

وهذه الاخيره تمثل معادلة تفاضليه خطيه متجانسه من الدرجة الثانيه تمثل نظاما توافقيا محافظا بتردد ثنائي $\nu_1$ يساوي

$$\nu_1^2 = \frac{g}{L_1} + \frac{k a^2}{m_1 L_1^2} . \qquad (3.6)$$

ومن المعادله (3.6) بوضع $\varphi_1 = 0$ نحصل على تعبير للتردد الثنائي الثاني حيث تصبح معادلة الثنائي الثاني بالشكل التالي :

$$m_2 L_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 L_2 g \varphi_2 + k a^2 \varphi_2 = 0$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \left( \frac{g}{L_2} + \frac{k a^2}{m_2 L_2^2} \right) \varphi_2 = 0$$

ومن هذه المعادله فان التردد الثنائي الثاني $\nu_2$ يساوي

$$\nu_2^2 = \frac{g}{L^2} + \frac{k a^2}{m_2 L_2^2} . \qquad (3.7)$$

فاذا أدخلنا معامل الارتباط $\alpha_1 = \frac{k a^2}{m_1 L_1^2}$ ، ______ $\alpha_2 = k a^2 / m_2 L_2^2$ ، فان

معادلة الاهتزازات لكل ثنائي منفرد باستخدام معادلة

لا غرانج تكون بالصوره التاليه :

$$m_1 L_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_1 L_1 g \varphi_1 - k a^2 \varphi_2 + k a^2 \varphi_1 = 0$$

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{m_1 L_1 g}{m_1 L_1^2}\varphi_1 - \frac{k a^2}{m_1 L_1^2} + \frac{k a^2}{m_1 L_1^2}\varphi_1 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \nu_1^2 \varphi_1 - \alpha_1 \varphi_2 = 0 \\ \ddot{\varphi}_2 + \nu_2^2 \varphi_2 - \alpha_2 \varphi_1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3.8)$$

اي أننا بذلك حصلنا على نظام معادلتين خطيتين تفاضليتين من الدرجه الثانيه . حل هذا النظام للمعادلتين يمكن ان يكون بالشكل التالي :

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 = A\cos(\omega t + \phi) \\ \varphi_2 = \beta\cos(\omega t + \phi) \end{aligned}\right\} \quad (3.9)$$

باشتقاق المعادله (3.9) ثم تعويضها في المعادله (3.8)

$$\dot{\varphi}_1 = -A\omega \sin(\omega t + \phi) , \ddot{\varphi}_1 = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi),$$

$$\dot{\varphi}_2 = -\beta\omega \sin(\omega t + \phi) , \ddot{\varphi}_2 = -\beta\omega^2\cos(\omega t + \phi).$$

نعوض في المعادله (3.8) عن كل من $\varphi_1$ ، $\varphi_2$ نحصل على

$$\left.\begin{aligned} -\omega^2 A + \nu_1^2 A - \alpha_1 \beta = 0 \\ -\omega^2 \beta + \nu_2^2 \beta - \alpha_2 A = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3.10)$$

هذا النظام للمعادلات يمتلك حلا حقيقياً في تلك الحالة فقط اذا كان محدده او ( Determinant ) يساوي صفر :

$$\begin{vmatrix} \nu_1^2-\omega^2 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \nu_2^2-\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

ومن هنا نحصل على معادلة لأجل تحديد $\omega$

$$(\nu_1^2-\omega^2)(\nu_2^2-\omega^2)-\alpha_1\alpha_2=0$$

$$\nu_1^2\nu_2^2-\nu_1^2\omega^2-\nu_2^2\omega^2+\omega^4-\alpha_1\alpha_2=0$$

$$\omega^4-\omega^2(\nu_1^2+\nu_2^2)+\nu_1^2\nu_2^2-\alpha_1\alpha_2=0 \qquad (3.11)$$

حل هذه المعادله ذات الأس الرباعي يعطي ترددين معكسين لأهتزازات النظام هما $\omega_1$ ، $\omega_2$ حيث

$$\omega_1^2=\frac{1}{2}\left[\nu_1^2+\nu_2^2-\sqrt{(\nu_1^2-\nu_2^2)^2+4\alpha_1\alpha_2}\right. \qquad (3.12)$$

$$\omega_2^2=\frac{1}{2}\left[\nu_1^2+\nu_2^2+\sqrt{(\nu_1^2+\nu_2^2)^2+4\alpha_1\alpha_2}\right. \qquad (3.13)$$

هذين الترددين $\omega_1$ ، $\omega_2$ لا يساويان الترددات الثنائيه $\nu_1$ ، $\nu_2$ ويسمان ( $\omega_1$ ، $\omega_2$) بالترددات الخاصه أو الطبيعه للنظام .

الترددات الطبيعه للنظام $\omega_1$ ، $\omega_2$ لاتعتمد على اختيار الاحداثيات ولا على الترددات الثنائيه $\nu_1$ و $\nu_2$ بل تتحدد فقط اعتماداً على صفات وخصائص النظام نفسه.

من المعادلة (3.10) نستطيع الحصول على العلاقة بين A و $\beta$ لأي من الترددين $\omega_1$ أو $\omega_2$ . بالنسبة للتردد $\omega_1$ :

$$\left[\frac{B}{A}\right]_{\omega_1} = \frac{\nu_1^2 - \omega_1^2}{\alpha_1}$$

$$= \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2 + \sqrt{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2}}{2\alpha_1} = \varkappa_1 \quad (3.14)$$

المقدار $\varkappa_1$ يتحدد تماما بواسطة مقاييس النظام ولا يعتمد على الظروف الابتدائيه ويسمى معامل قسمة السعات على التردد $\omega_1$ .

بهذا الشكل، فان سعة ذبذبه أحد البندولين على التردد $\omega_1$ يمكن أن تكون حرة ( هذه السعة تتحدد بواسطة الظروف الابتدائيه ) ، بينما سعة ذبذبه البندول الثاني وعلى نفس التردد فهي دائماً موجوده بعلاقة محدده مع سعة ذبذبة البندول الاول ( مرتبطه به ) .

الآن نجد المقدار $\varkappa_2$ وهو معامل قسمة السعات على التردد $\omega_2$ .

$$\left[\frac{B}{A}\right]_{\omega_2} = \frac{\nu_1^2 - \omega_2^2}{\alpha_1} = \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2 - \sqrt{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2}}{2\alpha_1} = \varkappa_2 \quad (3.15)$$

وبالتالي يصبح الحل العام للمعادله التفاضليه المعبره عن الحركه الاهتزازيه للنظام ( المعادله 3.8) بالهيئه :

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2),\\
\varphi_2 &= B_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)+B_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)\\
&= \varkappa_1 A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)+\varkappa_2 A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2).
\end{aligned}\right\}\quad (3.16)
$$

الثوابت $A_1$ ، $A_2$ ، $\phi_1$ ، $\phi_2$ تتحدد من الظروف الابتدائيه . توضح المعادله (3.16)، أنه في الحالة العامه تمثل ذبذبة كل بندول مجموع ذبذبتين توافقتين بالترددين الطبيعيين $\omega_1$ ، $\omega_2$ .

هذه الذبذبات التوافقيه تسمى الطرز الطبيعية Normal modes .

اذا كان الترددان الطبيعيين $\omega_1$ ، $\omega_2$ قريبين من بعضهما، فإن مجموع الذبذبات يحمل طبيعة الضربات. (لاحظ البند 8 من الفصل الاول) .

بواسطة الاختيار الخاص للظروف الابتدائيه نستطيع الحصول على ذبذبات توافقيه نقيه للنظام على الترددين $\omega_1$ او $\omega_2$ .

على سبيل المثال : اذا أزحنا البندولين في بدايه اللحظه الزمنيه بطريقة بحيث أن النسبة بين سعتيهما كانت تساوي $\varkappa_1$ ، بينما سرعتيهما متساويتان وكل منهما يساوي صفر، فإن النظام يبدأ الاهتزاز بتردد $\omega_1$ .

العلاقة (3.16) يمكن النظر اليها كقانون للتحول الخطي للاحداثيين $\varphi_1$ ، $\varphi_2$ الى الاحداثيين X و Y :

$$X = A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1),\quad Y = A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2).\quad (3.17)$$

حينذاك يتضح ان كلا من هذين الاحداثيين الجديدين x و y ينجز ذبذبات توافقيه بتردد $\omega_1$ (أو $\omega_2$) (x بـ $\omega_1$ و y بـ $\omega_2$) وبأية ظروف ابتدائيه .

الاحداثيان x ، y – يسميان بالاحداثيات الطبيعة للنظا م .

الاحداثيان $\varphi_1$ و $\varphi_2$ يرتبطان بالاحداثيين الطبيعيين x و y بالعلاقه التاليه :

$$\varphi_1 = x + y \,, \qquad \varphi_2 = \varkappa_1 x + \varkappa_2 y . \tag{3.18}$$

ليس من الصعوبة التوضح بشكل عام ، أنه بالنسبة لأي نظام بدرجتي حريه يمكن الانتقال الى الاحداثيات الطبيعة بواسطة التحولات الخطيه المطابقه .

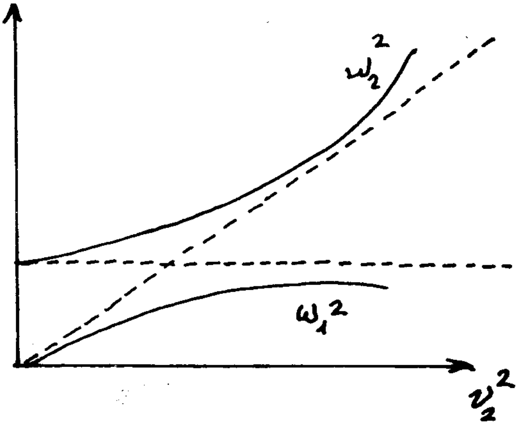
بالاضافه الى ذلك ، فان معادلتي الحركيه الاهتزازيه بالاحداثيين x و y تمتلك الهيئه :

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = 0 , \qquad \ddot{y} + \omega_2^2 y = 0 . \tag{3.19}$$

خصوصيات المعادلات المكتوبه بالاحداثيات الطبيعه هي غياب تلك الحدود التي تصف الارتباط بين الانظمه التنائيه . وبصورة مماثله فان في التعابير الممثله للطاقة الحركيه والكامنه المكتوبه بالأحداثيات الطبيعة تغيب الحدود بالاحداثيات المتحولة . وبقدر ما ان كل احداثي طبيعي ينجز ذبذبة توافقيه بأحدى الترددات الخاصه ، فان هذه الترددات تسمى ترددات طبيعية للنظام .

§2 العلاقه بين الترددات الطبيعيه والثنائيه للنواسين المرتبطين

والان نبحث اعتماد الترددات الطبيعيه للنظام $\omega_1$ ، $\omega_2$ على الترددات الثنائيه $\nu_1$ ، $\nu_2$ للنواسين . ولغرض التحديد سوف نعتبر ان هناك تردد واحد فقط يتغير هو $\nu_2$ . وبمساعدة العلاقه (3.12) و (3.13) يمكن ان نرسم منحني اعتماد مربع التردد الخاص للنظام على $\nu_2^2$ كما في الشكل (3.3)




شكل 3.3

وهذا المنحني يسمى منحني FIN وكما نلاحظ انه في اية قيمه للتردد الثنائي $\nu_2$ ، فان الترددات الثنائيه تقع بين الترددات الخاصه . وهذه الصفه هي صفه عامه لاى نظام او لكل الانظمه بدرجتي حريه .

والان نحلل بالتفصيل حالة ، عندما تختلف بقوة الترددات الثنائيه $\nu_2^2 \gg \nu_1^2$ ، $\nu_2^2 \ll \nu_1^2$ وحالة ، عندما يكونا متساويين $\nu_1^2 = \nu_2^2$ . ففي الحاله عندما $\nu_2^2 \ll \nu_1^2$ تكون الترددات الخاصه مساويه لـ

$$\left.\begin{aligned} \omega_1^2 &\cong \nu_2^2 - \alpha_1 \alpha_2 / \nu_1^2 \\ \omega_2^2 &\cong \nu_1^2 + \alpha_1 \alpha_2 / \nu_1^2 \end{aligned}\right\} . \qquad (3.20)$$

وبقدار ما ان $\alpha_1\alpha_2 \ll \nu_1^2\nu_2^2$ فان التردد $\omega_1$ يكون قريبا من $\omega_2$ والتردد $\omega_2$ يكون قريبا من $\nu_1$ .

وفي الحالة عندما $\nu_2^2 \gg \nu_1^2$ فأن الترددات الطبيعيه تساوي

$$\omega_1^2 \cong \nu_1^2 - \alpha_1\alpha_2/\nu_2^2, \quad \omega^2 \cong \nu_2^2 + \alpha_1\alpha_2/\nu_2^2. \qquad (3.21)$$

أما في حالة مساواة الترددات الثنائيه $\nu_1^2 = \nu_2^2$ فأن الترددات الطبيعية تأخذ الاشكال التاليه :

$$\omega_1^2 = \nu^2 - \sqrt{\alpha_1\alpha_2}, \quad \omega_2^2 = \nu^2 + \sqrt{\alpha_1\alpha_2}. \qquad (3.22)$$

وفي حالة مساواة كتلتي البندولين فأن العلاقة (3.22) تتبسط :

$$\omega_1^2 = \frac{g}{L}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{L} + \frac{2ka^2}{mL^2}. \qquad (3.23)$$

وبهذا الشكل ففي حالة الاختلاف القوي للترددات الثنائيه $\nu_1$ و $\nu_2$، فان الترددات الطبيعيه $\omega_1$، $\omega_2$ يكونان قريبين الى الترددات الثنائيه .

وبمقدار تقارب الترددات الثنائيه فأن الترددات الخاصه اوالطبيعيه يبتعدان عنهما .

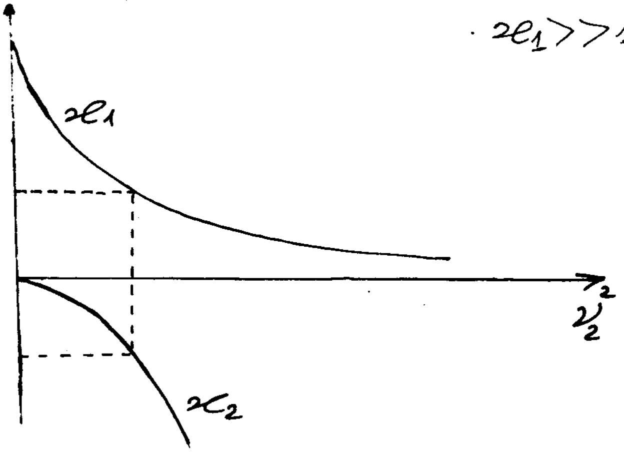
ان اكبر اختلاف بين $\omega$ و $\nu$ يظهر قرب مساواة الترددات الثنائيه $\nu_1$ ، $\nu_2$ .

نتابع الآن سلوك معاملات القسمة للسعات (المعاملات $\varkappa_1$ ، $\varkappa_2$) :

في حالة تغير التردد الثنائي $\nu_2$.

بما ان $\nu_1$ يكون دائما اكبر من $\omega_1$ واقل من $\omega_2$، لذلك فمن العلاقتين (3.14) و (3.15) ينتج أن $\varkappa_1$ يكون دائما اكبر من صفر، بينما $\varkappa_2$ يكون دائماً اقل من الصفر. لذلك فأن ذبذبات البندولين على التردد $\omega_1$ يحدثان دائما بطور واحد. اما الذبذبات على التردد $\omega_2$ فهي دائماً بطور مضاد. من العلاقتين (3.14) و (3.15) يمكن أن نبني اعتماد معاملات قسمة السعات بالاحداثيات على التردد الثنائي $\nu_2$ ، اي اعتماد $\varkappa_1$ و $\varkappa_2$ على $\nu_2^2$ في الحالة عندما $m_1 = m_2$ (لاحظ الشكل 3.4).

فمعامل قسمه السعتين $\varkappa_1$ الذي يتفق مع الذبذبات بطور واحد أي مع تلك الذبذبات للبندولين الذين لهما نفس الطور (ذبذبات الطراز الاول) وفي حالة عندما: $\nu_2 << \nu_1$ ، فان $\varkappa_1 \cong \frac{\nu_1^2}{\alpha_1}$ ، أي ان $\varkappa_1 >> 1$.




شكل 3.4

اعتماد معامل قسمة السعات على الترددات الثنائية :

بحدود زيادة $\nu_2$ فان المعامل $\varkappa_1$ يقل ، أي ان الزيادة في $\nu_2$ تعني النقصان في $\varkappa_1$ حتى تبلغ الحالة التي فيها $\nu_2 \gg \nu_1$ ، حينئذ تصبح $\varkappa_1$ أقل بكثير من وحده وهي تساوي بالتقريب

$$\varkappa_1 \cong d_2/\nu_2^2 .$$

سوف نعتبر ان تغيّر $\nu_2$ مرتبطاً فقط بتغيّر طول البندول الثاني $L_2$ . حينذاك في حالة عندما $\nu_1 \gg \nu_2$ سيكون طول البندول الثاني أكبر بكثير من طول البندول الاول $L_1$ .

اما في حالة $\nu_1 \ll \nu_2$ فان $L_2 \ll L_1$ وان سعة الذبذبات التوافقيه ذات الطور الواحد للبندول الطويل أكبر دائما من سعة الذبذبات للبندول القصير ( الشكل 4 . 3 ) . ان ذلك مرتبط بكون التردد الخاص للذبذبات ذات الطور الواحد $\omega_1$ أقل من التردد الخاص للذبذبات التي بطور مضاد $\omega_2$ ، ولذلك فان طاقة الذبذبات ذات الطور الواحد تكون بالاساس عند المقادير المنخفظه للتردد الثنائي للنظام. وبالعكس فان طاقة الذبذبات ذات الطور المضاد تكون كامنه عند النظام الثنائي ذو التردد العالي ، أي في التردد $\omega_2$ .

وبالتالي نستطيع ان نستخلص الاستنتاجات التاليه :

1 ) البندول الاكثر قصرا يهتز بسعة اكثر . وطبقا لذلك:

$\nu_1 >> \nu_2$ لما $|\varkappa_2| << 1$

$\nu_2 >> \nu_1$ لما $|\varkappa_2| >> 1$

وفي حالة مساواة الترددات (عندما $\nu_1 = \nu_2$ )

فان معاملات القسمه تبدو متساويه في قيمها المطلقه ،
أي أن

$$\varkappa_1 = -\varkappa_2 = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} = \frac{L_2}{L_1}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \quad . \qquad (3.24)$$

2) اذا كان البندولان متطابقين،اى ان

$$l_1 = L_2 \,, \qquad m_1 = m_2 \,,$$

فان معاملا قسمة السعات $\varkappa_1$ و $\varkappa_2$ يكونان متساويين ويساويان بقيمهما المطلقه لوحده واحده

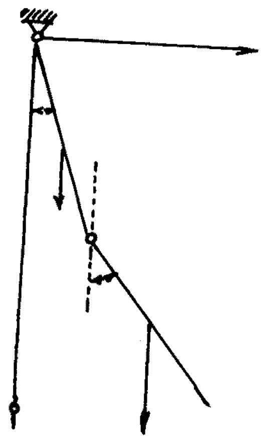
وبالتالي يعني ذلك تساوي سعتي ذبذبات كلا البندولين على الترددين الخاصين $\omega_1$ ، $\omega_2$ .

3) في حالة عدم تطابق البندولين ( $m_1 \neq m_2$ )
فان سعتي ذبذباتهما تكونا مختلفتين حتي في حالة تكافئ تردداتهما الثنائيه $\nu_1$ ، $\nu_2$ .
لكن الطاقة في حالة تكافئ الترددات الثنائيه تكون موزعه بالاحداثيات بصوره متساويه .

مثال : بندول ثنائي يتكون من سلكين متجانسين متكافئ الطول $AB=BC=2L$ ولهما وزن واحد $P_1 = P_2 = P$ ، مرتبطان بمفصل $B$ كما موضح على الشكل 5. 3 ، هذا البندول ينجز ذبذبات صغيره في مستوى شاقولي

حول وضع التوازن $Ay$ ، اضافة الى ان السلك $AB$ يدور حول المحور $A$ ، بينما السلك $BC$ حول المفصل $B$ . جد معادلة الذبذبات الصغيره لهذا البندول حول الوضع الشاقولي لتوازنه المستقر .

الحل : اذا كان السلكان صلدين بصورة مطلقه ، فان النظام المبحوث يمتلك درجتين من الحريه .



شكل 3.5

كاحداثيين مستقلين ناخذ الزاويتين $\varphi 1$ ، $\varphi 2$ ، اللتين يصنعهما السلكان $AB$ و $BC$ مع الشاقول . في وضع التوازن المستقر عندما كلا السلكين ينطبقان على $Ay$ كانت :

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0 .$$

نختار محاور الاحداثيات بالصوره المبينه على الشكل 3.5.

الطاقة الحركيه للبندول الثنائي تساوى مجموع الطاقات الحركيه لكل من السلكين .

السلك $AB$ يدور حول المحور $A$ ، وبالتالي ، فان طاقته الحركيه

$$T_1 = \frac{1}{2} J_A \dot{\varphi}_1^2 = \frac{2}{3} \frac{P}{g} L^2 \dot{\varphi}_1^2 . \qquad (1)$$

حيث $J_A$- عزم عطالة السلك بالنسبة للمحور $A$ .

السلك $BC$ ينجز حركة معقدة ، طاقته الحركيه $T_2$ حسب بديهية معروفة تساوي الطاقه الحركيه لمركز العطاله ( اذا افترضنا أن كل كتلة السلك متمركزة فيه ا مجموعةً مع الطاقه الحركيه للسلك في دورانه النسبي حول مركز العطاله

$$T_2 = \frac{P}{2g}(\dot{x}_D^2 + \dot{y}_D^2) + \frac{1}{2} J_D \dot{\varphi}_2^2 . \qquad (2)$$

حيث $x_D$ و $y_D$ – إحداثيات النقطة $D$ التي تمثل منتصف السلك $BC$ ، بينما $J_D$- عزم العطاله بالنسبة الى $D$ .

نعوض في هذا التعبير

$$x_D = L(2\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2) ,$$

$$y_D = L(2\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) ,$$

$$J_D = \frac{P}{g}\frac{L^2}{3} ,$$

نحصل

$$2T = \frac{PL^2}{g}\left[4\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 4\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right] + \frac{P}{g}\frac{L^2}{3}\dot{\varphi}_2^2 . \qquad (3)$$

الطاقة الحركيه لكل النظام

$$T = \frac{2PL^2}{3g}\left[4\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 3\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right] . \qquad (4)$$

اذا كان البندول ينجز ذبذبات صغيره ، لذلك عند تحليل $\cos(\varphi_1-\varphi_2)$ يمكن ان نتحدد بالحد الاول واضعين

$$\cos(\varphi_1-\varphi_2) \approx 1 .$$

حينذاك

$$T=\frac{2PL^2}{3g}\left(4\dot{\varphi}_1^2+\dot{\varphi}_2^2+3\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\right). \qquad (5)$$

الطاقة الكامنه تساوي شغل اوزان السلكين عند ازاحة النظام من بعض الاوضاع ( $\varphi_1$ ، $\varphi_2$ ) في التوازن انشاقولي .

شغل وزن السلك الاول على هذه الازاحه سوف يساوي

$$U_1=PL(1-\cos\varphi_1).$$

شغل وزن السلك الثاني $BC$ .

$$U_2=PL\left[2(1-\cos\varphi_1)+(1-\cos\varphi_2)\right].$$

الطاقة الكامنه لكل النظام تساوي

$$U=PL\left[4-3\cos\varphi_1-\cos\varphi_2\right].$$

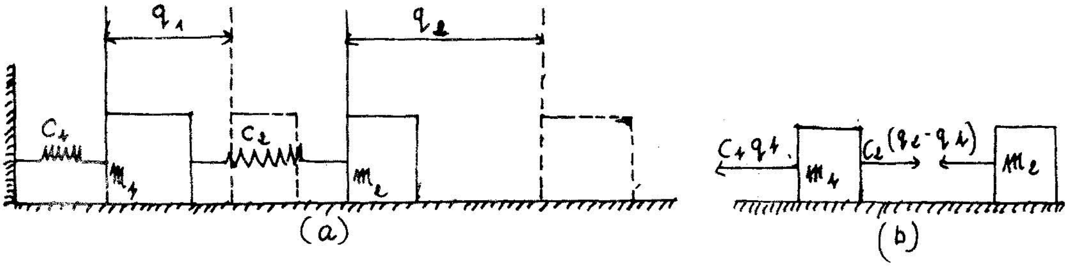
تحليل الطاقه الكامنه $U$ بدرجات الحريه $\varphi_1$ و $\varphi_2$ يبدأ مع حدود الترتيب الثاني بالنسبة الى $\varphi_1$ و $\varphi_2$ وسوف يمتلك بالنسبة للمقادير الصغيره من $\varphi_1$ ، $\varphi_2$ الهيئه التاليه :

$$2U=PL\left(3\varphi_1^2+\varphi_2^2\right).$$

**مثال 8:** جسمان كتلتيهما $m_1$ ، $m_2$ موجودان على سطح أفقي أملس . ربط الجسم الاول الى حائط بواسطة نابض معامل صلادته $C_1$ ووصل الجسم الثاني بالاول بواسطة نابض ثاني معامل صلادته $C_2$

كما يوضح ذلك على الشكل 6.3 . جد معادلة حركة النظام اذا أُكسِبَ الجسم الثاني سرعه مقدارها $V_0$ في الوضع عندما كلا النابضين لم يتمددا بعد . جد

كذلك التردد الخاص أو الطبيعي للنظام .




شكل 6 . 3

**الحل** : النظام يمتلك درجتي حريه ،اي يمكن تحديد أوضاع النظام باحداثيين مستقليين .
الاحداثي الاول $q_1$ – يحدد ازاحة الجسم الاول عن وضع التوازن الابتدائي ؛الاحداثي الثاني $q_2$ – يحدد ازاحة الجسم الثاني عن وضع التوازن الابتدائي كما يلاحظ ذلك من الشكل 6 . 3 .
نستخدم معادلات لاغرانج لصياغة المعادلات التفاضليه لاهتزازات النظام الصغيره . نجد معادلة الطاقه الحركيه للنظام

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 . \qquad (1)$$

اما الطاقة الكامنه للنظام فهي تتكون أيضا من الطاقه الكامنه للجسمين

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2} c_1 q_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (q_2 - q_1)^2 . \qquad (2)$$

لان $q_1$ــ هــي عبــارة عــن استطــالــة النــابــض الاول ،أمــا $(q_2-q_1)$ فــهي استطــالــة النــابــض الثــانــي .

نــاتــي الان لصيــاغــة معــادلات لاغــرانج

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 . \qquad (3)$$

حيــث $i = 1 , 2$ ،لأن النظــام يمتــلك درجــتين للحــريــــه .

وُبقــدر مــا أن :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m_1 \ddot{q}_1 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m_1 \dot{q}_1$$

وإن (4)

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = c_1 q_1 - c_2 (q_2 - q_1) \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial q_1} = 0$$

لذا فــان المعــادلــه التفــاضليــه الاولى ل لاغــرانج تمتلــك الصــوره التــاليــه :

$$m_1 \ddot{q}_1 - c_1 q_1 + c_2 (q_2 - q_1) = 0 . \qquad (5)$$

امــا بالنسبــة للجســم الثــانــي فــان

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m_2 \dot{q}_2 \quad , \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m_2 \ddot{q}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = c_2 (q_2 - q_1) . \qquad (6)$$

لذلــك فالمعــادلــه التفــاضليه لحــركــة الجســم الثــانــي

$$m_2\ddot{q}_2 - C_2(q_2-q_1). \qquad (7)$$

وبهذا الشكل حصلنا على نظام لمعادلتين تفاضلتين هما (5) و(7) .

ولغرض ايجاد التكامل العام لهذا النظام من المعادلات الخطيه التفاضليه والمتجانسه ذات المعاملات الثابته سوف نبحث الحلول الخاصه بهيئة

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= B\sin(\omega t+\varphi), \quad q_2 = D\sin(\omega t+\varphi), \\ \ddot{q}_1 &= -B\omega^2\sin(\omega t+\varphi), \quad \ddot{q}_2 = D\omega^2\sin(\omega t+\varphi). \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

نعوض تفاضل المعادله ( 8 ) في نظام المعادلات(5) ،( 7 ) نجد ان :

$$\begin{aligned} &B\omega^2 m_1 - BC_1 + C_2(D-B) , \\ &D\omega^2 m_2 - C_2(D-B) . \end{aligned} \qquad (9)$$

في هذا النظام للمعادلات توجد ثلاثة مجاهيل $B$ و $D$ و $\omega$.

، من هذه المجاهيل نستطيع ان / نجد العلاقه بين $B$ و $D$.

من المعادله ـ (1) للنظام (9) نجد ان

$$\frac{B}{D} = \frac{C_2}{C_1+C_2-m_1\omega}. \qquad (10)$$

ومن المعادله (2) لنظام المعادلات (9) نجد أن:

$$\frac{B}{D} = \frac{C_2-m_2\omega}{C_2}. \qquad (11)$$

وبمساعدة المعادلتين (10) ، (11) نحصل على معادلة التردد ،أي أن

$$\frac{c_1+c_2-m_1\omega}{c_2}=\frac{c_2}{c_2-m_2\omega}. \quad (12)$$

ومن هذه المعادلة نجد أن:

$$\omega^4-\left(\frac{c_2}{m_2}+\frac{c_1+c_2}{m_1}\right)\omega^2+\frac{c_1c_2}{m_1m_2}. \quad (13)$$

ومن هذه المعادلة الرباعية الاس نجد الترددات الخاصة او الطبيعيه للنظام $\omega_1$ و $\omega_2$، أي ترددا الطراز الأول ($\omega_1$) والطراز الثاني ($\omega_2$).

$$\omega_{1,2}=\sqrt{0,5\left(\frac{c_2}{m_2}+\frac{c_1+c_2}{m_1}\right)\mp\sqrt{0,25\left(\frac{c_2}{m_2}+\frac{c_1+c_2}{m_1}\right)^2-\frac{c_1c_2}{m_1m_2}}}. \quad (14)$$

وبهذا الشكل يظهر من المعادله (14) امكانية تحقق ترددين ماديين أوطبيعيين $\omega_1$، و $\omega_2$.

وبقوة خطية المعادلتين (5)، (7) فان الحل العام أو التكامل العام يمكن أن يكون مجموع حلين خاصين بهيئة المعادله (8) ولكن بترددين مختلفين $\omega_1$ و $\omega_2$، وبطورين مختلفين $\varphi_1$، $\varphi_2$ (طورين ابتدائيين يتفقان مع الطراز الاول الذي تردده $\omega_1$ ومع الطراز الثاني بالتردد ($\omega_2$) كذلك بسعتين مختلتين، اي ان الحل في المعادله (8) ياخذ الصوره التاليه:

$$q_1 = B_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2),$$
$$q_2 = D_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + D_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \qquad (15)$$

حيث

$$q_1 = B_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1),$$
$$q_2 = D_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1). \qquad (16)$$

يصنعان الذبذبه الاساسيه الاولى للنظام ،أي ذبذبه الطراز الاول .

اما

$$q_1 = B \sin(\omega_2 t + \varphi_2),$$
$$q_2 = D_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \qquad (17)$$

فهما

يصنعان الذبذبه الاساسيه الثانيه ،أي ذبذبة الطراز الثاني . ومن جانب أخر فان علاقة السعات في الذبذبه الاساسيه الاولى،من المعادله (10) بوضع $\omega = \omega_1$، نحصل

$$\left[\frac{B_1}{D_1}\right]_{\omega_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2 - m_1\omega_1^2} = \varkappa_1. \qquad (18)$$

ومن الذبذبه الاساسيه الثانيه نحصل

$$\left[\frac{B_2}{D_2}\right]_{\omega_2} = \frac{C_2}{C_1 + C_2 - m_1\omega_2^2} = \varkappa_2. \qquad (19)$$

حيث $\varkappa_1$ ، $\varkappa_2$ معاملا قسمة السعات للطرازين ( النغمتين ) الاول و الثاني . لذلك يأخذ الحل العام في المعادله ( 15) الهيئه التاليه

$$q_1 = \varkappa_1 D_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \varkappa_2 D_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (20)$$

$$q_2 = D_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + D_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

نلاحظ هنا ان سعة الجسم الثاني حره ، بينما سعة الاول مقيده ، وهذا يعتمد على ظروف التجربه ، اي ان الثوابت الحره ;

$D_1$ ، $D_2$ ، $\varphi_1$ ، $\varphi_2$ ،

تتحدد من الظروف الابتدائيه للحركه .

طبقا لشروط المسأله ، عند $t = 0$ ، فان

$$q_1 = 0, \quad \dot{q}_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad \dot{q}_2 = v_0. \quad (21)$$

نعوض مقادير المتغيرات للمعادله (21) في المعادله (20) ، نحصل :

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_1 D_1 \sin\varphi_1 + \varkappa_2 D_2 \sin\varphi_2 &= 0 \\ D_1 \sin\varphi_1 + D_2 \sin\varphi_2 &= 0 \\ D_1 \omega_1 \cos\varphi_1 + D_2 \omega_2 \cos\varphi_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

من المعادله (22) تتحدد جميع الثوابت الحره للتكامل حيث

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0,$$

أي أن الطور الابتدائي لكلتي الذبذبتين الاساسيتين يساوي صفر . اما سعات الذبذبتين الاساسيتين فتساوي :

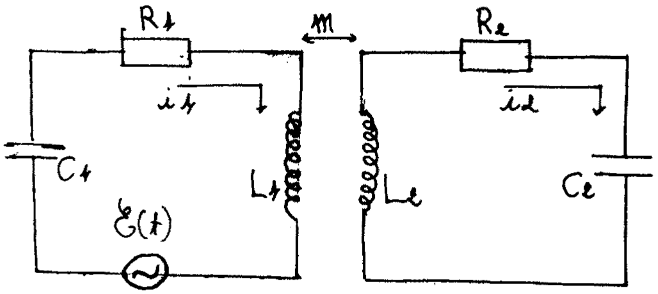
$$D_1 = \frac{v_0}{\omega_1 (B_2 - B_1)}, \quad D_2 = \frac{v_0}{\omega_2 (B_1 - B_2)}. \quad (23)$$

طبقا للمعادله (20) ، فان حركة النظام تمثل تركيب

ذبذبتين توافقيتين بترددين مختلفين .

### 3 الذبذبات الاضطراريه في الانظمه بدرجتي حريه :

نبحث الاهتزازات الاضطراريه في نظام متكون من دائرتي حث (ملفين لدائرتين) مرتبطتين، طبق على احداهما جهد خارجي متناوب كما في الشكل (3.7)




شكل 3.7

الشكل 3.7 يصور الدوائر الكهربائية المرتبطه في حالة وجود التاثير الخارجي (دائرتين مرتبطتين حثياً). نكتب معادلات الذبذبات لهذه الدوائر مهملين في البداية الخمود

$$\frac{1}{C_1}\int i_1\,dt + L_1\frac{di_1}{dt} = \mathcal{E}_0\cos\omega t + M\frac{di_2}{dt},$$
$$\frac{1}{C_2}\int i_2\,dt + L_2\frac{di_2}{dt} = M\frac{di_1}{dt}. \qquad (3.24)$$

حيث $i_1$ ، $i_2$ – التيارين في الدائرتين .

$L_1$ ، $L_2$ ، $C_1$ ، $C_2$ – الحث والسعات في الدائرتين ، $M$ – معامل الحث المتبادل . في النظام

الخطي يصح تطبيق او استخدام مبدا التراكب لذلك يكفي ان نبحث او ندرس تاثير القوة الخارجية التوافقيه $\mathcal{E}(t)=\mathcal{E}_0 \cos \omega t$ على النظام.

ففي هذه الحالة،فإن معادلات اهتزازات التيارات تمتلك الاشكال التاليه :

$$\left.\begin{aligned} \ddot{i}_1+\nu_1^2 i_1-\alpha_1 \ddot{i}_2 &= -\frac{\mathcal{E}_0}{L_1}\omega \sin \omega t \\ \ddot{i}_2+\nu_2^2 i_2-\alpha_2 \ddot{i}_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.25)$$

حيث

$$\nu_1^2=\frac{1}{L_1C_1},\quad \nu_2^2=\frac{1}{L_2C_2},\ \alpha_1=\frac{M}{L_1},\ \alpha_2=\frac{M}{L_2}. \qquad (3.26)$$

الذبذبات في النظام سوف تتالف اوتتكون من : ـ ذبذبات خاصة بترددات $\omega_1$ ، $\omega_2$ ومن ذبذبات اضطرارية بتردد القوة الخارجيه $\omega$ .

بما أن الذبذبات الخاصه في الانظمه المماثلة قد بحثناها سابقا،لذلك فالان نتحدد فقط بدراسة الذبذبات الاضطراريه ،لذلك فسوف نفتش عن حل للمعادلة (3.25) بالصوره التاليه :

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= I_1 \sin \omega t \\ i_2 &= I_2 \sin \omega t \end{aligned}\right\}. \qquad (3.27)$$

حيث $I_1$ ، $I_2$ ـ سعتي التيارين ، بأشتقاق المعادله (3.27) مرتين ثم تعويضها في المعادله (3.25) نحصل على

$$\left.\begin{aligned} (\nu_1^2-\omega^2)I_1+\alpha_1\omega^2 I_2 &= \frac{\mathcal{E}_0\omega}{L_1} \\ (\nu_2^2-\omega^2)I_2+\alpha_2\omega^2 I_1 &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (3.28)$$

من هذه المعادلة ومن جزئها الثاني ينتج أن

$$I_2 = \frac{-\alpha_2 \omega^2 I_1}{(\nu_2^2-\omega^2)} \quad .. \quad (3.29)$$

هذه العلاقه المحصله للسعات $I_1$ ، $I_2$ على التردد $\omega=\omega_1$ تتطابق مع معامل قسمة السعات $\mathcal{H}_1$ في حالة الذبذبه الخاصه بتردد $\omega_1$ .

أما على التردد $\omega=\omega_2$ فأن علاقة السعات $\mathcal{H}_2$.

وبهذا الشكل فان علاقة سعات الذبذبات الاضطراريه في الدوائر الكهربائية تتطابق مع علاقة سعات الذبذبات الخاصة ( على نفس التردد المطابق ).

وبتعويض العلاقة (3.29) في المعادله (3.28) ، الجزء الاول - نحصل على تعبير لـ $I_1$ و $I_2$

$$I_1 = \frac{-\mathcal{E}_0 \omega (\nu_2^2-\omega^2)}{L_1[(\nu_1^2-\omega^2)(\nu_2^2-\omega^2)-\alpha_1\alpha_2\omega^4} \quad . \quad (3.30)$$

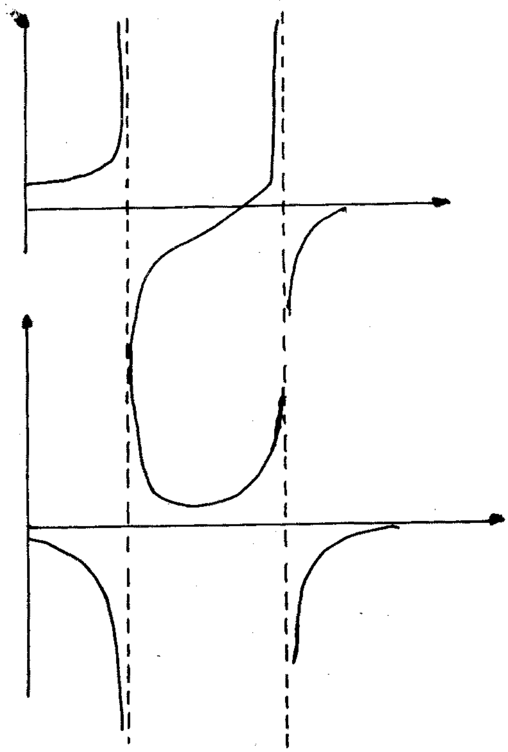
$$I_2 = \frac{\alpha_2 \mathcal{E}_0 \omega^3}{L_1[(\nu_1^2-\omega^2)(\nu_2^2-\omega^2)-\alpha_1\alpha_2\omega^4} \quad . \quad (3.30')$$

على الشكل (3.8) وضح اعتماد $I_1$ ، $I_2$ على تردد القوة الخارجيه $\omega$ .

ففي النقطة $\omega=\omega_1$ و $\omega=\omega_2$ ، فان السعات $I_1$ ، $I_2$ يؤولان الى المالانهاية.

وبهذا الشكل ففي النظام بدرجتي حرية فان الزيادة الاستجابية ( زيادة التناغم ) لسعة الذبذبه تحدث

على كلا الترددين الخاصين $\omega 1$ ، $\omega 2$ .



شكل 3.8

يبين هذا الشكل اعتماد السعات لنظام محافظ بدرجتي حريه على تردد القوه الخارجيه .

فعندما تكون $\omega < \nu_2$ ، فان التيارين $i_1$ ، $i_2$ ينجزان ذبذبات متضادة الطور، وعندما تكون $\omega > \nu_2$ ، فأن الذبذبات المنجزة في هذه الحالة تكون بطور واحد، أما النقطة $\omega = \nu_2$ فهي هامة بسبب أن السعة $I_1$ عند هذه النقطة تؤول الى الصفر. أي انه في هذه النقطة يحدث هدوء أو توقف للذبذبه، في نفس الدائرة التي طبق عليها الجهد الخارجي أو القوة الخارجية، $\mathcal{E}(t)$.

أما في الدائرة الثانيه فان الذبذبات لا تؤول الى الصفر بأية نهاية للتردد $\omega$. أن تردد الهدوء أو التوقف في الحالة العامه يعتمد على أي من الدائرتين الثنائيتين للنظام المعقد، قد طبق الجهد الخارجي.

ان هذا التردد (تردد الهدوء) يساوي دائما التردد الثنائي لذلك الجزء من الدائرة المعقده الذي يحصل عند قطع السلسلة في نقطة التوصيل بالمصدر الخارجي.

نفسر السبب الفيزياوي لغياب الذبذبه في الدائرة الاولى عند $\omega = \nu_2$ .

ولهذا الغرض نعتبر أن المصدر المتناوب المطبق على الدائرة الاولى يكون بنفس تردد الذبذبة في الدائرة الثانية اي أنه قد أثار في الدائرة الثانية تردد $\nu_2$ .

$$\mathcal{E}_{21} = M\frac{di_2}{dt} = M\frac{d}{dt}(I_2 \sin\omega t) = M\omega I_2 \cos\omega t. \quad (3.31)$$
$$= -\mathcal{E}_0 \cos\nu_2 t.$$

وكما نلاحظ أن $\mathcal{E}_{21}$ لدرجة من الدقة انه ينوب عن

أو يعوض القوة الخارجية المتناوبه .

لذلك فان الذبذبات الاضطراريه في الدائره الاولى على هذا التردد ( على التردد $\omega/2$ ) لاتظهر أو لاتحدث . وفي التطبيقات العملية يستخدم بصورة واسعه الغاء أو أهمال الذبذبات غير المرغوبه في الدائره المطبق عليها جهدا خارجيا بتردد معين وذلك بمساعدة دائره اضافة مبنيه على هذا التردد ، بنفس الطريقة التي صنفت بها المرشحات الكهربائيه على فواصل ترددين في المستقبلات الراديويه وغيرها .

## 4.δ الاهتزازات الاضطراريه في الانظمة المشتتة بدرجتي حرية

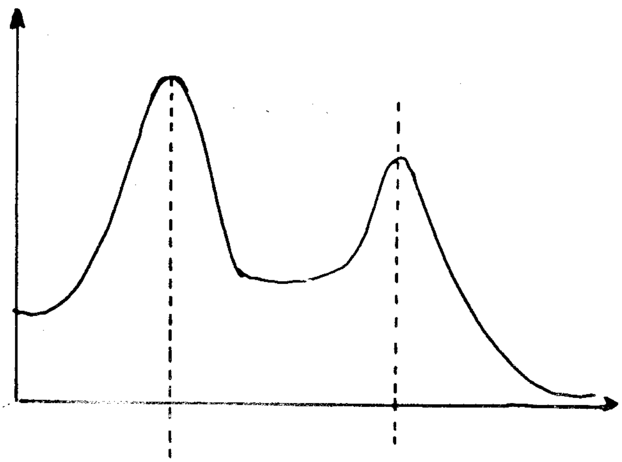
حساب الخمود في الدائره الكهربائيه في حالة الاهتزازات الاضطراريه يقود الى أن تصبح سعة الاهتزازات في حالة الرنين نتائية .

ففي $\omega = \nu_2$ فان سعة الذبذبه في الدائره الكهربائية الاولى في حالة حساب الخمود لايؤول الى الصفر .

وبهذا الشكل فان سحب الذبذبات غير المرغوبه في النظام المشتت لا يمكن بأية حال أن يدون كاملاً ولكن قلة سعة الذبذبات على التردد $\nu_2$ في حالة الخمود الضعيف كبيرة جدا .

على الشكل (3.9) المقابل يوضح منحني الاستجابه في الدائرة الاولى في حالة وجود الخسران في الطاقة .

ان وجود الخسران في الطاقة يقود الى قلة سعة الذبذبة قرب الرنين والى توسع منحني الرنين .



شكل 3.9

وفي حالة تقارب $\omega_1$ و $\omega_2$ الى ما فيه الكفاية فأن الخسران يمكن أن يحول منحني الاستجابه في تحدب واحد يخفي تماما الفجوات بين الترددين .
مهمة الاهتزازات الاضطراريه في الانظمة المشتقة بدرجتي حرية من الملائم أن تحل بأستخدام طريقة السعة المعقدة .
المعادلة التي تربط السعات المعقدة $I_1$ و $I_2$ مع مقاييس الدائره الكهربائيه ومع سعة القوة الكهربائيه المتحركه $\mathcal{E}_0$ تمتلك الشكل التالي :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= I_1\left[R_1 + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)\right] + j\omega M I_2, \\ 0 &= I_2\left[R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)\right] + j\omega M I_1 \end{aligned}\right\} \quad 3.32)$$

حيث $R_1$ و $R_2$ - مقاومتا الدائرتين .
وباستثناء $I_2$ من المعادلة (3.32) الجزء الثاني نحصل على :

$$\mathcal{E}_0 = I_1\left[\left(R_1 + R_2\frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)^2}\right) + j\mathcal{X}\right] . \quad 3.33$$

حيث :
$$\mathcal{X} = \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) - \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)^2}\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)$$

وبهذا الشكل فالنظام المتكون من دائرتين مرتبطتين تحول الى دائرة واحدة تضم مقاومة فعاله $R_{act.}$ ومقاومه غير فعاله $\mathcal{X}_{rea.}$ حيث الفعاله تساوي

$$R_{act.} = R_1 + R_2 \frac{w^2 M^2}{R_2^2 + \left(wL_2 - \frac{1}{wC_2}\right)^2} .$$

ففي هذه الدائره تؤثر القوة المتناوبه التي سعتها $\mathcal{E}_0$ وفيما يمر التيار الذي سعته $I_1$ ،
اما شرط الرنين في هذه الدائرة فهو ان تكون $\mathcal{X}_{react.} = 0$ مساوية للصفر .

( شرط الرنين هو ان تكون المقاومه غير الفعاله $\mathcal{X}_{react.} = 0$ ) .

نطبق التعديل النسبي : $\Delta_2 = 1 - \frac{\nu_2^2}{w^2}$ ، $\Delta_1 = 1 - \frac{\nu_1^2}{w^2}$

والمحدد الثنائي للخمود $\vartheta_1$ حيث
$\vartheta_1 = R_1/wL_1$
والمحدد الثنائي للخمود $\vartheta_2 = R_2/wL_2$ • حينذاك
وبالاخذ بالاعتبار العلاقات التالية

$$\nu_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1} , \quad \nu_2^2 = \frac{1}{L_2 C_2} , \quad \alpha_1 = \frac{M}{L_1} , \quad \alpha_2 = \frac{M}{L_2}$$

فان شرط الرنين ياخذ الصورة التاليه : ـ

$$\Delta_1 \vartheta_2^2 + \Delta_2^2 \Delta_1 - \alpha_1 \alpha_2 \Delta_2 = 0 . \qquad (3.34)$$

وفي حالة تكافئ الترددات الثنائيه للدائرتين $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ فأن التعديلات تكون متساويه وحينذاك نحصل على

$$\Delta(\Delta^2 + \vartheta_2^2 - \alpha_1 \alpha_2) = 0 \qquad (3.35)$$

وفي هذه المعادله ثلاثة مقادير لـ $\Delta$ :

$$\Delta_1 = 0, \Delta_{2,3} = \pm\sqrt{\alpha_1\alpha_2 - 2\ell_2^2} \qquad (3.36)$$

ومن هنا نجد ثلاثة مقادير لتردد القوه الخارجيه التي فيها رد الفعل $\mathcal{X}_{react.} = 0$ . وهذه الترددات

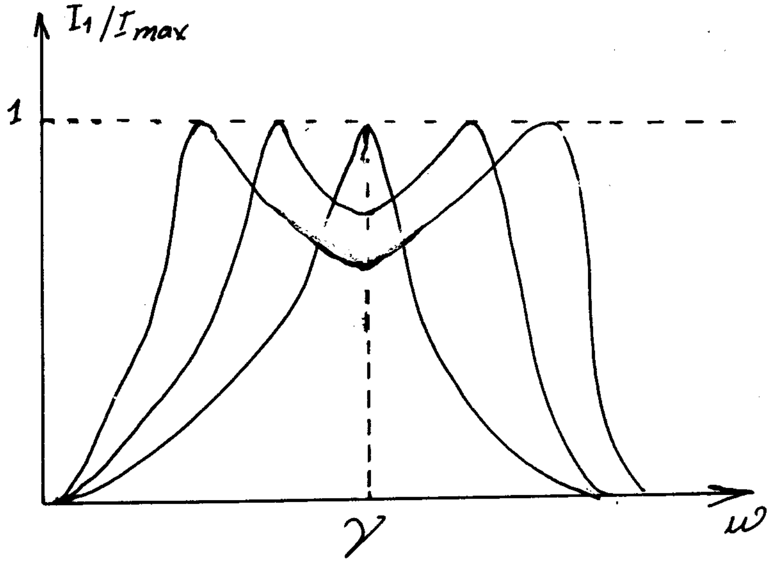
$$\left.\begin{aligned} \omega_1 = \nu, \qquad \omega_2 &= \nu\sqrt{1+\sqrt{\alpha_1\alpha_2 - 2\ell_2^2}}, \\ \omega_3 &= \nu\sqrt{1-\sqrt{\alpha_1\alpha_2 - 2\ell_2^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (3.37)$$

اذا كان خمود الدائره الثانيه كبير بما فيه الكفاية، لذلك يتحقق تردد رنين واحد $\omega = \nu$ . وفي هذه الحالة فأن النظام بدرجتي حريه يقود نفسه كنظام بدرجة حريه واحدة .

في حالة $\alpha_1\alpha_2 > 2\ell_2^2$ تكون هناك ثلاث مقادير للتردد $\omega$ التي فيها يتحقق الشرط $\mathcal{X}_{react.} = 0$ . على الترددات $\omega_2$ و $\omega_3$، فان سعة التيار تبلغ قيمتها الصغرى .

وهذه القيمه الصغرى بقدر ماتكون عميقة بقدر ما يزيد او يفوق معامل الارتباط على $\sqrt{\alpha_1\alpha_2}$ اكبر مقدار يزيد عن محدد الخمود للدائرة الثانيه، كما في الشكل ( 3 . 10 ) .

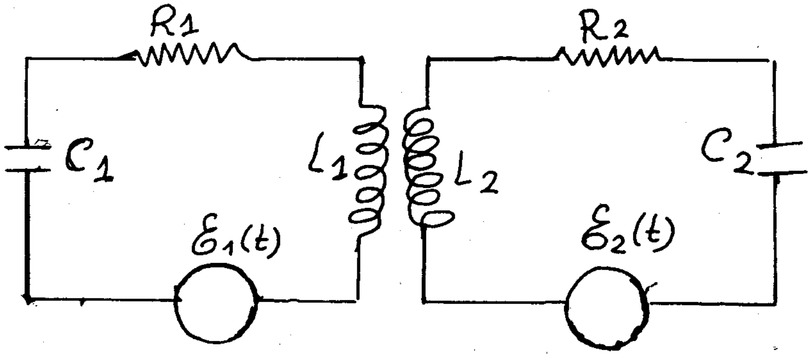
معامل الارتباط الذي فيه $\alpha_1\alpha_2 = 2\ell_2^2$ يسمى معامل حرج .




شكـــل ( 10 . 3 ) منحنيـات الــرنـــين للدائرتين المرتبطـتـــــين بـتـرددين ثـنـا ئـيـين متســاويــين ،
بمعــامـــل ارتبــاط : اقــل مــن الحرج (1)
قــريـــب الى الحرج (2)
اكـــبر مـــن الحـــرج (3)

5 ل • خصائص الذبذبات القسريه في النظام ذو الدائرتين الكهرباثيتين •
في حالة غياب الخمود وعند تطبيق قوتين خارجيتين على كل من الدايرتين في ان واحد كما في الشكل 11 • 3 تصبح معادلة ذبذبات التيارات في مثل هذين الدائرتين تمتلك الهيئه التاليه :

$$\left.\begin{aligned} \ddot{i}_1 + \nu_1^2 \dot{i}_1 - \alpha_1 \ddot{i}_2 &= \dot{\xi}_1 / L_1 . \\ \ddot{i}_2 + \nu_2^2 \dot{i}_2 - \alpha_2 \ddot{i}_1 &= \dot{\xi}_2 / L_2 . \end{aligned}\right\} \quad (3.38)$$




شكل 11 • 3 يبين خارطة دائرتين مرتبطتين بجهدين خارجين في كل منهما •

فاذا كانت القوى الخارجيه المتناوبه تؤثر بنفس التردد الذي يتفق مع تردد الطور الواحد، اي ان

$$\xi_1 = \xi_{10} \cos \omega t ,$$

$$\xi_2 = \xi_{20} \cos \omega t ,$$

فان سعتي التيارين $I_1$ و $I_2$ يساويان

$$I_1 = \frac{L_2 \xi_{10} \omega (\nu_2^2 - \omega^2) - M \xi_{20} \omega^3}{L_1 L_2 \left[ (\nu_1^2 - \omega^2)(\nu_2^2 - \omega^2) - \alpha_1 \alpha_2 \omega^4 \right]} , \quad (3.39)$$

$$I_2 = \frac{L_1 \xi_{20} \omega (\nu_1^2 - \omega^2) - M \xi_{10} \omega^3}{L_1 L_2 \left[ (\nu_1^2 - \omega^2)(\nu_2^2 - \omega^2) - \alpha_1 \alpha_2 \omega^4 \right]}$$

من المعادلة (3.39) نستنتج مبدئين او خاصيتين هامتين :

1 . مبدأ التبادل الذي في حالتنا هذه هو ان: سعة الذبذبات في الدائرة الثانيه عند تطبيق جهد معين في الدائره الاولى ، تساوي سعة الذبذبات في الدائره الاولى اذا طبق نفس الجهد الخارجي المتناوب في الدائره الثانيه . مبدأ التبادل هذا صحيح بسبب خطية النظام . مثل هذه الحالة تستخدم بصورة واسعة في التطبيق العملي ،كما في مستقبلة التلفزيون ANTEAN التي تعمل على الاستقبال والبث بشكل متكافئ .

2 . غياب الرنين عند وجود علاقة محدده بين سعتي الجهدين الخارجيين :

عندما تكون هناك علاقة معينة بين $\xi_{20}$ و $\xi_{10}$ ، فانه يمكن ان يخيب الرنين في النظام حتى في تلك الحالة عندما $\omega = \omega_1$ أو $\omega = \omega_2$ . ان هذا الرنين يخيب اذا آل البسط و المقام في المعادله (3.39) الى الصفر في آن واحد في الحالة عندما $\omega = \omega_1$ أو $\omega = \omega_2$ .

نفرض على سبيل المثال : على التردد $\omega = \omega_1$ يؤول مقام السعة $I_1$ الى الصفر . هذا ممكن عند العلاقة التاليه بين $\xi_{10}$ و $\xi_{20}$ .

$$\frac{\xi_{20}}{\xi_{10}} = \frac{\nu_2^2 - \omega_1^2}{\alpha_2 \, \omega_1^2} \qquad (3.40)$$

بتعويض الشرط (3.40) في المعادلة (3.39) أخذين بالحساب

$$\nu_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1} , \qquad \nu_2^2 = \frac{1}{L_2 C_2} ,$$

أن

$$\alpha_1 = M/L_1 , \quad \alpha_2 = M/L_2 .$$

نحصل على نتيجة أن مقام هذه المعادلة كذلك يساوي صفر .

من هذا ينتج أنه في حالة تحقق الشرط (3.40) فان مقام وبسط المعادلة (3.39) يمثلان نفسيهما صغيرين الى المالانهاية وبترتيب متكافئ .

لذلك فان سعتي الذبذبات في كلتي الدائرتين تبقيان محدودتين بغض النظر عن وجود القوى الخارجيه المطبقة على الدائرتين وبتردد الرنين . الجزء الايمن

من المعادلة (3.40) يساوي :

$$-\frac{1}{\varkappa_1} = \frac{\nu_2^2 - \omega_1^2}{\alpha_2 \omega_1^2} .$$

حيث $\varkappa_1$- معامل قسمة السعات الخاصه على التردد $\omega_1$ . لذلك فان الشرط (3.40) يمكن أن يكتب بالشكل التالي :

$$A \xi_{10} + B \xi_{20} = 0 . \qquad (3.41)$$

حيث $A$ و $B$ -سعتي الذبذبات الخاصة للدائرتين على التردد $\omega_1$ .

الشرط (3.41) يسمى شرط تعامد القوى الخارجية للذبذبة الخاصة بتردد $\omega_1$ . تعامد القوى الخارجيه للذبذبة الخاصة فيزياويا يعني أن شغل القوة الخارجيه في النظام الثنائي الاول يساوي ويعاكس شغل القوه الخارجيه في النظام الثنائي الثاني .

وبما أن الشغل الكلي للقوى الخارجية يجب أن يساوي صفر ، لذا فأنه لاتحصل زيادة لسعات ذبذبات النظام .

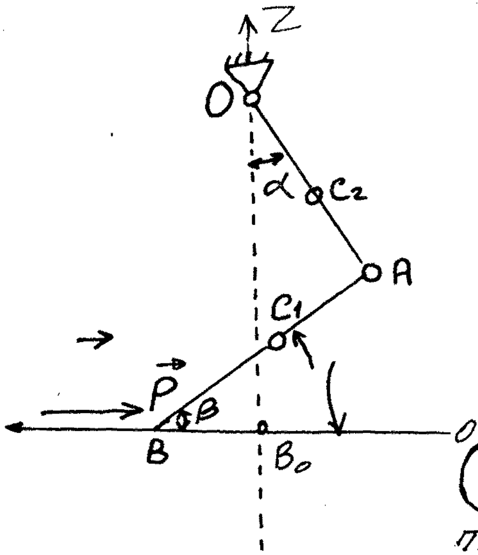
فعلى سبيل المثال :-

لو أثرت قوتين خارجيتين متضادتا الطور وبتردد $\omega_1$ على بندولين متناظرين فأن الاهتزاز الرنين لايحصل .

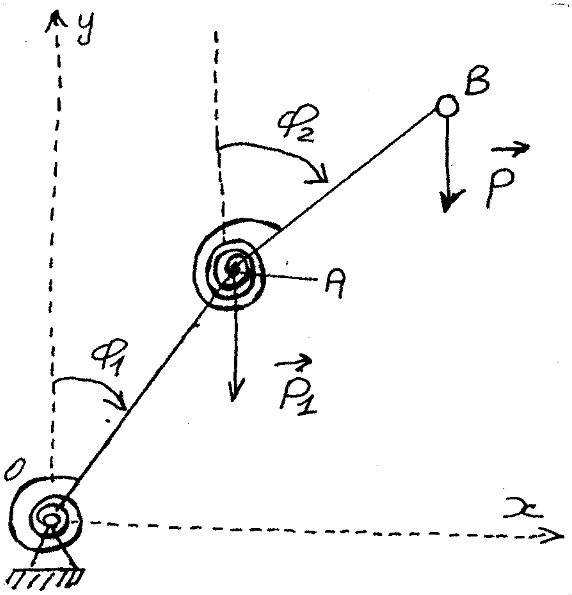
تعامد القوى الخارجيه والذبذبه الخاصة يمكن استخدامهما للتخلص من الرنين غير المرغوب فيه على احد الترددات الطبيعية .

## أسئلة الفصل الثالث:

س1: التوازن المستقر للسلكين.




شكل (3.12)




شكل (3.13)

سلكين طول كل منهما $l$ ووزنه $Q$ ، يرتبطان مع بعضهما مفصليا في النقطة $A$ . نهاية احدهما ثبتت في $O$ ، بينما احدى نهايتي السلك الثاني تستند على سطح بسيط في $B$ . النقطة $A$ سلطت قوه افقيه ثابته $\vec{P}$ . عندما يكون النظام موجودا في حالة التوازن ، فان السلك $OA$ يصنع زاوية $\alpha$ مع الشاقول، بينما السلك $AB$ يصنع زاوية $\beta$ مع الافق. حدد التوازن المستقر للنظام.

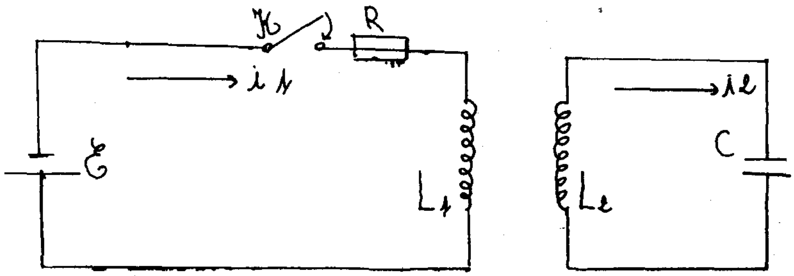
س 2 بندول ثنائي يتكون من سلكين طوليهما على التوالي : $OA = l_1 , \quad OB = l_2$

( لاحظ الشكل 3.9 ) .

هذان السلكان يرتبطان مع بعضهما عبر مفصل واحد ويرتبطان في $O$ عبر مفصل آخر بالارض . قوى الجاذبية الارضيه $\vec{P}_1$ و $\vec{P}_2$ يؤثران في $A$ و $B$ على التوالي .

في النقطتين $O$ و $A$ وضعا نابضين حلزونيين Speral غير قابلين للتشوه عندما يكون البندولين في الوضع الشاقولي . حدد معاملا صلابة السلكين $C_1$ ، $C_2$ اللذين يصبح بالنسبة لهما الوضع الشاقولي وضع توازن مستقر للنظام في الحالة: عندما تهمل قوى الاحتكاك .

س 3




شكل 3 . 10

في الشكل اعلاه جد قانون تغير $i_2$ في الدائره الثانيه بعد توصيل المفتاح $K$ وتحت شرط ان يكون معامل التأثير المتبادل يساوي $M = \sqrt{L_1 L_2}$ .

# الفصل الرابع

# الفصل الرابع

## الاهتزازات في الانظمة الخطية بدرجة $n$ من الحريه

### 1§. الاهتزازات الخاصه في الانظمه المحافظه

كثير من الانظمه الاهتزازيه يجب ان تبحث كانظمه ذات $n$ درجة حريه . لمثل هذه الانظمه تنتسب الدوائر الكهربائيه المعقده وبصورة خاصه الفلترات الكهربائيه.
اما في الانظمه الميكانيكيه فيمكن استخدام الجزيئات ذات الذرات الكثيره كمثال على الانظمه الاهتزازيه بدرجة $n$ حريه .
ان اهمية نظرية الاهتزازات بدرجات كثيره من الحريه تتجلى في دراسة البلورات المسننه للاجسام الصلبه .
توصف الحركه في الانظمه ذات $n$ من درجات الحريه بـ $n$ من الاحداثيات المستقله ، والتي انتخابها يجرى بصوره حره كما في الانظمه بدرجتي حريه .
ففي الانظمه الكهربائيه (الدوائر الكهربائيه المعقده) يمكن اختيار الجهد على كل عنصر من عناصر الدوائر بهيئة متغير مستقل او اختيار التيار الكهربائي في كل وصلة مستقله . لذلك فان عدد درجات الحريه يحدد كاقل عدد للمتغيرات الضروريه للوصف الكامل للحركه .
وكما في الانظمه بدرجتي حريه يمكن استخدام الاحداثيات الطبيعيه في الانظمه المبحوثه في هذا البند :
لذا فان عدد الاحداثيات الطبيعيه يساوى عدد درجات الحرية للنظام . حركة كل احداثي طبيعي تجرى

بصورة مستقلة عن الاحداثيات الاخرى. لذلك فان كل احداثي طبيعي ينجز ذبذبة توافقية بتردد خاص أو طبيعي ، وبالتالي فأن أي ذبذبات حرة أواضطرارية يمكن تصورها بهيئة تركيب Superpozitions للاهتزازات الطبيعية .

لغرض بحث الاهتزازات الخاصة في نظام بدرجة $n$ من الحرية نستخدم معادلة لاغرانج .

LAGRANG,S equation :

استخدام لاغرانج في وصف الحركة في الانظمة ذات $n$ درجة حرية :

افرض ان الحركة في النظام تتحدد ب $n$ من الاحداثيات المستنتجة او المستقله

$$q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$$

في الحالة الغالبة يمكن أن نتصور هذه الاحداثيات المستنتجه كأزاحات لبعض نقاط الجمله او النظام الميكانيكي أو الشحنات على موصلات الدوائر الكهربائيه ، لذلك فأن الطاقة الكامنه للنظام تصبح دالة للاحداثيات المستنتجه : $U = U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$

ففي وضع التوازن المستقر فان الطاقة الكامنه تمتلك الصوره التاليه :ـ لا قل مقاديرها $U_{min.}$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_s}\right)_{q_{so}} = 0 . \quad (4.1)$$

لجميع قيم $s$ من 1 الى $n$ .

حيث $q_{s0}$ ـ مقدار الاحداثي المستنتج $q_s$ عند وضع التوازن . فاذا اخترنا بهيئة احداثيات جديدة $x_s = q_s - q_{s0}$ ممثلة لانحراف الاحداثي عن وضع التوازن ، فبالنسبة للمقادير الصغيره من $x_s$ يمكن أن نكتب

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) - U(0, 0, \dots, 0) =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_s}\bigg|_0 x_s + \frac{1}{2}\sum_{s,l=1} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_s \partial x_l}\right) x_s x_l . \quad (4.2)$$

وبما ان الطاقة الكامنه تتحدد بدقة حتى الثابت لذلك نضع $U(0, 0, \dots, 0)$ تساوي صفر . نستخدم المعادلة (4.1) مهملين الدرجات العليا للانحراف نحصل على :

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{s,l=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_s \partial x_l}\right) x_s x_l = \sum_{s,l=1}^{n} k_{sl} x_s x_l . \quad (4.3)$$

$U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ـ هي عبارة عن هيئة موجبة مربعة تعتمد على $x_s$ ، وبصورة مماثلة فأن الطاقة الحركية للنظام تمثل هي أيضا هيئئه محدده موجبة مربعة تعتمد على السرع العامة $\dot{x}_s$ ، اضافة الى ان $k_{sl} = k_{ls}$ .

$$T(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) = \sum_{s,l=1}^{n} m_{sl} \dot{x}_s \dot{x}_l . \quad (4.4)$$

في المعادلتين (4 . 3) ، (4 . 4) الحدود التي تحوى على $s = \ell$ تتطابق مع الطاقه الداخليه للانظمه الثنائيه والانفراديه .
اما الحدود بـ $s \neq \ell$ ، فانها تتفق مع طاقة الارتباط للنظامين الثنائيين $s$ و $\ell$ . في الحاله الميكانيكيه فان $m_{ss}$ و $k_{ss}$ تتفق مع كتل ومرونة النظام الثنائي (الانفرادى) $s$ . اما اذا استخدمنا الان معادلة لاغرانج :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s} + \frac{\partial U}{\partial x_s} = 0 ,$$

فاننا نحصل على $n$ من المعادلات التفاضليه الخطيه من الشكل :

$$\begin{aligned}
&m_{11}\ddot{x}_1 + m_{12}\ddot{x}_2 + \cdots + m_{1n}\ddot{x}_n + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + \cdots + k_{1n}x_n = 0 ,\\
&m_{21}\ddot{x}_1 + m_{22}\ddot{x}_2 + \cdots + m_{2n}\ddot{x}_n + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + \cdots + k_{2n}x_n = 0 ,\\
&- - - - - - - - - - - - - - - -\\
&m_{n1}\ddot{x}_1 + m_{n2}\ddot{x}_2 + \cdots + m_{nn}\ddot{x}_n + k_{n1}x_1 + k_{n2}x_2 + k_{nn}x_n = 0 .
\end{aligned} \tag{4.5}$$

لتحليل نظام المعادلات (4 . 5) يصبح من الملائم استخدام اشكال المصفوفات (او الماتركس) .
ندخل المصفوف الممثل للكتله $\hat{m}$ والمصفوف الممثل للمرونه $\hat{k}$

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & m_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{nn} \end{pmatrix} ,$$

$$\hat{k} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{nn} \end{pmatrix} . \tag{4.6}$$

كلا المصفوفين $\hat{m}$ و $\hat{k}$ مربعين ومتماثلين .

والآن سوف نعتبر الاحداثيات $X_1, X_2, \dots, X_n$ كمركبات لمتجه الذبذبة $\vec{X}$ :

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} ,$$

طبقا لقاعدة حساب المصفوفات يمكن كتابة المعادلة (4.5) بهيئة الماترنس أو المصفوف :

$$\hat{m} \ddot{\vec{X}} + \hat{k} \vec{X} = 0 . \qquad (4.7)$$

المقدار $\hat{m} \ddot{\vec{X}}$ هو عبارة عن متجه ( ماتركس بصف واحد او مصفوف بصف واحد) ويسمى متجه قوة العطالة.

وبالمثل المقدار $\hat{k} \vec{X}$ هو متجه ايضا ويمثل قوة المرونه ويسمى متجه المرونه .

حل المعادله الماتركسيه (4.7) من الطبيعي ان يبحث عنه في شكل المتجه :

$$\vec{X} = \vec{A} e^{jwt} . \qquad (4.8)$$

حيث $\vec{A}$ - متجه السعة ، وهو في الحالة العامه يمكن ان يكون معقدا ، اي أن مركباته هي عبارة عن السعات المعقده للذبذبات التي تتطابق مع الاحداثيات .

من المعادلة (4.8) ينتج أن : $\ddot{\vec{X}} = -w^2 \vec{A} e^{jwt}$

وبأستخدام خواص الماتركس وامكانية مفاضلته 6 يمكن كتابة المعادلة(4.7) بالهيئه التاليه

$$(-\omega^2 \hat{m} + \hat{k})\vec{A} = 0. \qquad (4.9)$$

هذه المعادلة الماتركسيه تمتلك حلا فقط بتلك الحالة: عندما يكون محدد معاملاتها يساوي صفر، اي عندما

$$\left| -\omega^2 \hat{m} + \hat{k} \right| = 0. \qquad (4.10)$$

المعادلة (4.10) هي عبارة عن معادلة الدرجة $n$ بالنسبة الى $\omega^2$ ،حيث من هذه المعادلة يمكن أن نجد $n$ من الترددات الخاصة لذبذبات الانظمة $\omega_s^2$ ،حيث

$$S = 1, 2, \ldots, n.$$

وبقدر ما أن جميع معاملات المعادلة (4.9) هي اعداد حقيقيه ،لذا فان المتجه $\vec{X}_s$ الذي يطابق التردد الخاص $\omega_s$ يمتلك الهيئه التاليه :

$$\vec{X}_s = \vec{A}_s e^{j\omega_s t} + \vec{A}_s^{*} e^{-j\omega_s t}. \qquad (4.11)$$

حيث أن متجه السعة $\vec{A}_s$ يجب ان يحقق المعادلة التاليه :

$$(-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k})\vec{A}_s = 0. \qquad (4.12)$$

وهذه المعادله الماتركسيه تكافئ نظام $n$ من المعادلات المتجانسه بالنسبة للسعه $A_{sm}$ . الرمز الاول للسعه $A_{sm}$ ( الرمز $s$ ) يطابق رقم التردد الخاص، أما الرمز الثاني ( $m$ ) فهو يطابق رقم الاحداثي.

من نظام المعادلات (4.12) يمكن أن نجد العلاقة بين السعات: $A_{sm}/A_{s1} = \varkappa_{sm}$

المقدار $\varkappa_{sm}$ ينتج المتجه $\vec{K}_s$ الذي يسمى متجه معامل قسمة السعات على التردد $\omega_s$ او يسمى متجه هيكل الذبذبه الخاصه للنظام $s$ .

المعاملات $\varkappa_{sm}$ لجميع قيم $s$ تشكل مصفوف مربع يمتلك الهيئه التاليه :

$$\hat{\varkappa} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varkappa_{12} & \varkappa_{22} \ldots & \varkappa_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varkappa_{1n} & \varkappa_{2n} \ldots & \varkappa_{nn} \end{pmatrix} \qquad (4.13)$$

متجه السعه $\vec{A}_s$ يعبر عنه خلال $\vec{K}_s$ بالشكل التالي:

$$\vec{A}_s = A_{s1} \vec{K}_s \, . \qquad (4.14)$$

في الانظمة المحافظه جميع المعاملات $\varkappa_{sm}$ حقيقيه، أي ان ذبذبات جميع الاحداثيات على تردد خاص معين تحدث بطور واحد او باطوار متضاده .

بالنسبة للمتجه $\vec{A}_S^*$ وبصوره مماثله نحصل على

$$\vec{A}_S^* = A_{S1}^* \vec{K}_S e^{j\omega_S t} . \qquad (4.15)$$

ولذلك يمكن تمثيل الذبذبه الخاصه بالشكل

$$\vec{X}_S = \vec{A}_{S1} \vec{K}_S e^{j\omega t} + \vec{A}_{S1}^* \vec{K}_S e^{-j\omega t} . \qquad (4.16)$$

لذا فان الحل العام لمعادلة النظام المتاتركسيه (4.7) يمثل نفسه تركيب *Superposition* للحلول من نوع الحل (4.16) .

$$X(t) = \sum_{S=1} C_S \vec{K}_S \cos(\omega_S t + \varphi_S) . \qquad (4.17)$$

حيث $C_S = 2|A_{S1}|$ .

في هذا التعبير $C_S$ و $\varphi_S$ يتحددان من الظروف الابتدائيه . اما أشكال أو هياكل الذبذبات الخاصه $\vec{K}_S$ والترددات $\omega_S$ فهي تعتمد على مقاييس النظام . لتمييز الذبذبه الخاصه $S$ من الضروري أن نحدد في بداية اللحظه الزمنيه انحراف النظام عن وضع التوازن لكل احداثي والذي يتناسب طرديا مع $\vec{K}_S$ . في هذه الحاله فان جميع السعات $C$

ما عدا $C_S$ تساوي صفر .

وكما في حالة الانظمه بدرجتي حريه نستطيع ان ندخل الاحداثيات الطبيعيه بالنسبه للانظمه بدرجة $n$ من الحريه . اي ندخل تلك الاحداثيات التي تنجز ذبذبات توافقيه باية ظروف ابتدائيه . يمكن ان ندخل هذه الاحداثيات بالصوره التاليه :

نحدد $n$ من الاهتزازات التوافقيه بهيئه

$$\eta_S = C_S \cos(\omega_S t + \varphi_S). \qquad (4.18)$$

حيث $S = 1, 2, 3, \ldots, n$

كل من هذه الاهتزازات $\eta_S$ يمكن النظر اليها كذبذبه طبيعيه . في الحقيقه ان المجموع $\sum_{S=1}^{n} \eta_S$ يمثل حركة الاحداثي الاول $X_1(t)$ . اما حركة الاحداثيات الاخرى في حالة تحديد $\eta_S$ كذلك حُدِّدت في المعادله (4.17) .

$$X_\ell(t) = \sum_{S=1}^{n} \varkappa_{S\ell}\, \eta_S , \quad \ell = 1, 2, \ldots, n. \qquad (4.19)$$

العلاقة (4.19) تصبح صيغة أو قانون للتحول من الاحداثيات الطبيعيه الى الاحداثيات $X_\ell$ .

يمكن التعبير عن العلاقة (4.19) بهيئة ماتركس (بهيئة مصفوفه)

حيث تصبح :

$$\vec{X} = \hat{\partial e}\,\vec{H}, \tag{4.20}$$

حيث $H$- متجه ناتج من الاحداثيات الطبيعيه (الخاصه).
في حالة التحول أو الانتقال من $\vec{X}$ الى $\vec{H}$ في المعادله (4.7) نحصل على

$$\ddot{\vec{H}} + \hat{\partial e}^{-1}\,\hat{m}^{-1}\,\hat{k}\,\hat{\partial e}\,\vec{H} = 0. \tag{4.21}$$

وبما أن كل احداثي طبيعي ينجز اهتزازا توافقياً، لذلك لأي $\eta_s$ تصح المتساويه

$$\ddot{\eta}_s + \omega_s^2 \eta_s = 0. \tag{4.22}$$

مقارنة المعادلتين (4.21) و (4.22) توضح أن
$\hat{\partial e}^{-1}\,\hat{m}^{-1}\,\hat{k}\,\hat{\partial e}$ تمثل نفسها قطر الماتركس (قطر المصفوف).

أما عناصرها القطريه فهي عبارة عن الترددات الخاصه . لذلك ، ففي حالة الاهتزازات الخاصه للانظمة ، فان كل احداثي طبيعي ينجز ذبذبه توافقيه بما يتطابق معها من تردد خاص ، وأن ايه ذبذبه خاصه أو اهتزاز طبيعي يمثل نفسه تركيب او تراكب للذبذبات الخاصه او للاهتزازات الطبيعيه .

## تحديد الترددات الخاصه والمتجهات الخاصه .

نبحث في البدايه بعض الامثله التي تفسر الطريقه العامه للحل وبعض الحالات الخاصه للاهتزازات .

مثال 1/4) جد الترددات الخاصه ومتجهات الهياكل الخاصه بالنسبة الى نظام كهربائي اهتزازي (لاحظ الشكل 1 . 4) .

حيثيات : جميع الملفات والمتسعات متكافئه ، تساوي $L$ ، $C$.

معامل ارتباط الحث $k = \frac{M}{L} = \frac{1}{2}$ .

الحل : بهيئة احداثي مستقل نختار الشحنات ، الجاريه في اللحظه الزمنيه $t$ ، في كل من الابنيه الكهربائيه الثلاثه $q_1$ ، $q_2$ ، $q_3$

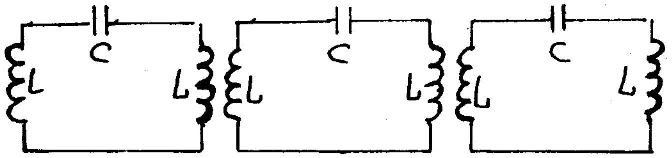
باستخدام قواعد كيرشوف ،

نصيغ ثلاث معادلات ، تربط المتغيرات الثلاثه هذه

$$L\ddot{q}_1 + L\ddot{q}_1 + M\ddot{q}_2 + \frac{1}{C} q_1 = 0 ,$$

$$M\ddot{q}_1 + L\ddot{q}_2 + L\ddot{q}_2 + M\ddot{q}_3 + \frac{1}{C} q_2 = 0$$

$$M\ddot{q}_2 + L\ddot{q}_3 + L\ddot{q}_3 + \frac{1}{C} q_3 = 0$$




شكل 4.1

فـي الصيـاغـه المصـفوفيـه ( المـاتـركسـيـه ) يمتـلك هـذا النظـام الهيئـة التـاليـه ( لاحـظ المعـادله 4.7 )

$$\begin{pmatrix} 2L & M & 0 \\ M & 2L & M \\ 0 & M & 2L \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = 0$$

بالقـسـمة علـى $2L$ ، نكتـب نظـام المعـادلات بهـيئـه متحـولـه :

$$\ddot{q}_1 + \frac{K}{2}\ddot{q}_2 + n^2 q_1 = 0 ,$$

$$\frac{K}{2}\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \frac{K}{2}\ddot{q}_3 + n^2 q_2 = 0 ,$$

$$\frac{K}{2}\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3 + n^2 q_3 = 0 ,$$

حيـث

$$n^2 = \frac{1}{2LC} , \quad K = \frac{M}{L}$$

نعـوض فـي هـذا النظـام الحـل مـن النـوع :

$$q_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha),$$
$$q_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha),$$
$$q_3 = A_3 \cos(\omega t + \alpha).$$

في النتيجه نحصل بالنسبة للسعه $A_L\ (L = 1, 2, 3)$
نظام المعادلات الجبريه الخطيه :

$$(-\omega^2 + n^2)A_1 - \omega^2 \frac{K}{2} A_2 + 0 \cdot A_3 = 0,$$

$$-\omega^2 \cdot \frac{K}{2} A_1 + (-\omega^2 + n^2) A_2 - \omega^2 \frac{K}{2} A_3 = 0 \qquad (1)$$
$$0 \cdot A_1 - \omega^2 \frac{K}{2} A_2 + (-\omega^2 + n^2) A_3 = 0.$$

نساوي محدد هذا النظام بالصفر، نصيغ المعادله
الخصوصيه (4.10) او المميزه

$$(-\omega^2 + n^2)\left[(-\omega^2 + n^2)^2 - \omega^2 \frac{K^2}{2}\right] = 0,$$

من ذلك نحصل بالنسبة للترددات الذاتيه المقادير التاليه
$\omega$ ( بترتيب متصاعد ) :

$$\omega_1 = n \Big/ \sqrt{1 + \frac{K}{2}\sqrt{2}}\,;\ \omega_2 = n;\ \omega_3 = \frac{n}{\sqrt{1 - \frac{K}{2}\sqrt{2}}}. \quad (2)$$

بعد ذلك نحدد مركبات المتجهات المستظمه للهياكل الخاصه $\mathcal{X}_{S\eta}$ ( معاملات قسمة السعات ) .

لا جل ذلك نكتب نظام المعادلات المتجانس (4.12)

$$-\omega_S^2 + n^2 - \omega_S^2 \frac{K}{2} \mathcal{X}_{S2} + 0 \cdot \mathcal{X}_{S3} = 0,$$

$$-\omega_S^2 \frac{K}{2} + \left(-\omega_S^2 + n^2\right) \mathcal{X}_{S2} - \omega_S^2 \frac{K}{2} \mathcal{X}_{S3} = 0 .$$

هنا بُسِّطَ نظام المعادلات (4.9) .

الكميات $\mathcal{X}_{S,2} = \frac{A_{S2}}{A_{S1}}$ , $\mathcal{X}_{S,3} = \frac{A_{S3}}{A_{S1}}$ ,

حيث $S=1,2,3$ رقم التردد الخاص .

نحل نظام المعادلات ( 4.12 ) بالنسبة لمعاملات قسمة السعات او متجهات الهياكل الخاصه

$$\mathcal{X}_{S,2} = \frac{n^2 - \omega_S^2}{\frac{K}{2} \omega_S^2}, \quad \mathcal{X}_{S,3} = \frac{n^2 - \omega_S^2}{\frac{K}{2} \omega_S^2} \mathcal{X}_{S,2} - 1 .$$

بالنسبة لكل تردد خاص نحصل

بالنسبة لـ $\omega_1$ : $\mathcal{X}_{1,1} = 1$ ; $\mathcal{X}_{1,2} = \sqrt{2}$ ; $\mathcal{X}_{1,3} = 1$

بالنسبة لـ $\omega_2$ : $\mathcal{X}_{2,1} = 1$ ; $\mathcal{X}_{2,2} = 0$ ; $\mathcal{X}_{2,3} = -1$

بالنسبة لـ $\omega_3$ : $\mathcal{X}_{3,1} = 1$ ; $\mathcal{X}_{3,2} = -\sqrt{2}$ ; $\mathcal{X}_{3,1} = 1$

الجواب : الترددات الخاصه ومتجهات النظام تساوى

$$\omega_1 = \frac{n}{\sqrt{1+\frac{K\sqrt{2}}{2}}}, \quad \omega_2 = n, \quad \omega_3 = \frac{n}{\sqrt{1-\frac{K\sqrt{2}}{2}}}.$$

$$\varkappa_{1,1} \equiv \varkappa_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix}; \varkappa_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}; \quad \varkappa_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

**مثال**

(4.2 : سلكين صلدين كتلتيهما $m$ وطوليهما $l$ ربطا مفصليا بصورة نموذجيه وعلقا بثلاثة نوابض ، صلابة كل منهما $C$ (شكل 4.2) . حدد ترددات وهياكل الذبذبات الشاقوليه الخاصه في مثل هذا النظام .

الحل :

نختار بهيئة احداثيات مستقله الكميات $x_1$ ، $x_2$ و $x_3$ التي تمثل الازاحات الشاقوليه لنهايات السلكين عن وضع التوازن الستاتيكي .

( ليس من السهولة كتابة معادلات الحركه بهذه الاحداثيات مباشرة ) .

يمكن جمع الطاقه الحركيه للسلكين المتحركين بمستوى شاقولي من طاقة الحركه الانتقاليه لمراكز الكتل وطاقة الحركه الدورانيه حول المحورين المارين خلال مركزى الكتل .

$$T = \frac{1}{2} m \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}_2^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_2^2 .$$

هنا $z_{1,2}$ – احداثيا مركزى كتلتي السلكين .

$\theta_{1,2}$ – زاويتى دوران السلكين في المستوى الشاقولي .

$I_0$ – عزم عطالة كل من السلكين بالنسبة للمحور المار خلال مركز كتلته .

الطاقه الكامنه – طاقة النوابض الثلاثه المتشوهه تساوى

$$U = \frac{1}{2} C X_1^2 + \frac{1}{2} C X_2^2 + \frac{1}{2} C X_3^2 .$$

نحول الطاقه الحركيه الى الاحداثيات : $X_1 , X_2 , X_3$ مستخدمين العلاقات التاليه :

$$z_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad \theta_1 = \frac{1}{\ell}(x_1 - x_2);$$

$$z_2 = \frac{1}{2}(x_2 + x_3); \quad \theta_2 = \frac{1}{\ell}(x_2 - x_3).$$

بحدود الطاقه الحركيه نكتب

$$T = \frac{m}{2}\frac{(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2}{4} + \frac{I_0}{2}\frac{(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2}{\ell^2} +$$

$$+ \frac{m}{2}\frac{(\dot{x}_2 + \dot{x}_3)^2}{4} + \frac{I_0}{2}\frac{(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)^2}{\ell^2}.$$

الان نصيغ معادلات الديناميكا (4.4) و (4.7)

$$\left(\frac{m}{4} + \frac{I_0}{\ell^2}\right)\ddot{x}_1 + \left(\frac{m}{4} - \frac{I_0}{\ell^2}\right)\ddot{x}_2 + Cx_1 = 0,$$

$$\left(\frac{m}{4} - \frac{I_0}{\ell^2}\right)\ddot{x}_1 + 2\left(\frac{m}{4} + \frac{I_0}{\ell^2}\right)\ddot{x}_2 +$$

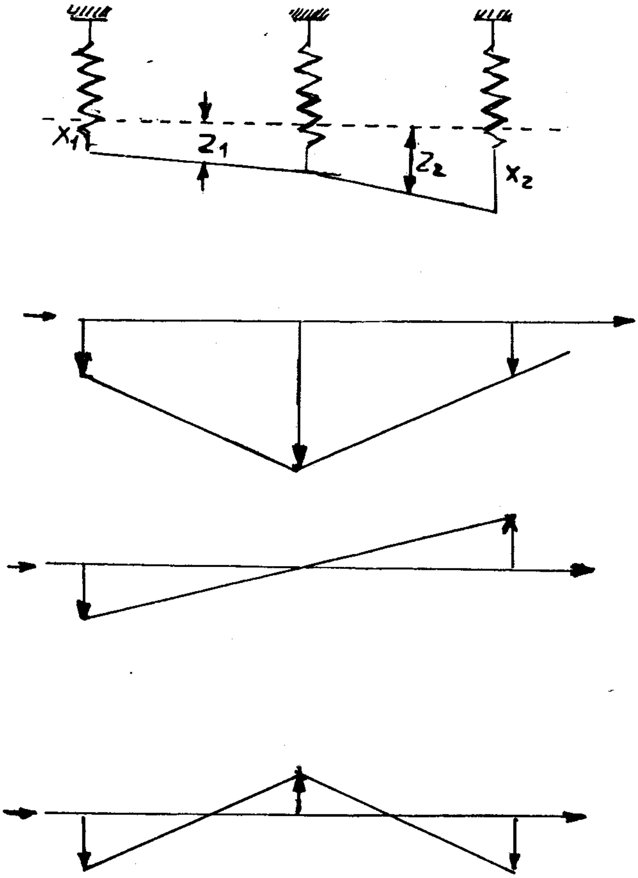
$$+ \left(\frac{m}{4} - \frac{I_0}{\ell^2}\right)\ddot{x}_3 + Cx_2 = 0,$$

$$\left(\frac{m}{4} - \frac{I_0}{\ell^2}\right)\ddot{x}_2 + \left(\frac{m}{4} + \frac{I_0}{\ell^2}\right)\ddot{x}_3 + Cx_3 = 0.$$

بالنسبة للسلك

$$I_0 = \frac{m\ell^2}{12}: \quad \frac{m}{4} + \frac{I_0}{\ell} = \frac{1}{3}m,$$

$$\frac{m}{4} - \frac{I_0}{\ell} = \frac{1}{6}m.$$




شكــــل 2 . 4

نظام المعادلات (4.7) بهيئه متحوله يكتب هكذا :

$$\ddot{x}_1 + \frac{1}{2}\ddot{x}_2 + n^2 x_1 = 0,$$

$$\frac{1}{4}\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \frac{1}{4}\ddot{x}_3 + \frac{1}{2}n^2 x_2 = 0,$$

$$\frac{1}{2}\ddot{x}_2 + \ddot{x}_3 + n^2 x_3 = 0,$$

حيث

$$n^2 = \frac{3c}{m}.$$

نعوض في نظام المعادلات (4.7) الحل الهيئه (4.8) ، بالنسبة للسعه $A_L$ ( $L$ = 1.2.3) على النظام المتجانس (4.12) :

$$(-w^2+n^2)A_1 - \frac{1}{2}w^2 A_2 + 0 \cdot A_3 = 0,$$

$$-\frac{1}{4}w^2 A_1 + \left(-w^2 + \frac{1}{2}n^2\right)A_2 - \frac{1}{4}w^2 A_3 = 0$$

$$0 \cdot A_1 - \frac{1}{2}w^2 A_2 + (-w^2+n^2)A_3 = 0.$$

من هذا تنتج المعادله الخصوصيه (4.10)

$$(n^2 - w^2)\left[(n^2 - w^2)\left(\frac{1}{2}n^2 - w^2\right) - \frac{1}{4}w^4\right] = 0,$$

الترددات الخاصه للنظام تساوى

$$\omega_1 = n\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} ; \quad \omega_2 = n ,$$

$$\omega_3 = n\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} .$$

باهمال الصف الاخير في النظام (4.0) نكتب بالنسبه لمعادلات قسمه السعات أو متجهات الهياكل الخاصه نظام المعادلات (4.14) الذي بحله نحصل على تعابير لمركبات المتجهات الخاصه

$$k_{s,n} \equiv \varkappa_{s,n} , \varkappa_{s2} = \frac{n^2-\omega^2}{\frac{1}{2}\omega_s^2} , \quad \varkappa_{s3} = \frac{\frac{1}{2}n^2-\omega_s^2}{\frac{1}{4}\omega_s^2}\varkappa_{s2}-1 ,$$

$$.(\varkappa_{s1}=1)$$

نعوض في هذه المتساويات على التوالي المقادير $\omega_1^2$ ، $\omega_2^2$ ، $\omega_3^2$ ، التي حصلنا عليها سابقا، نحسب مركبات المتجهات الخاصه والمتجهات الخاصه نفسها

$$k_1 \equiv \varkappa_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2,74 \\ 1 \end{Bmatrix} ; \quad \varkappa_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} ; \quad \varkappa_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,73 \\ 1 \end{Bmatrix} .$$

بوضع رقم الاحداثيات $n = 1 ، 2 ، 3$ على المحور الافقي ومقادير معاملات قسمة السعات على المحور الشاقولي ، يمكن بناء هياكل الذبذبات الخاصه ومن ثم نستطيع تصور وضع السلكين اثناء اهتزازهما على كل نغمه خاصه (لاحظ الشكل 4.2) .

## 2 §- الاهتزازات الاضطراريه في الانظمه بدرجة $n$ حريه

في الانظمه الخطيه بدرجة $n$ حريه يصح قانون التركيب للاهتزازات .

لذلك فآن المهمات او المسائل حول الذبذبات الاضطراريه تحت تاثير اية قوة دوريه تقودنا الى ايجاد الحركات الاضطراريه للنظام بتأثير قوة توافقيه بتردد $\omega$ .

وفي الحالة العامة يمكن آن تؤثر القوة على كل احداثي ، وبهذا الشكل فان القوة الخارجيه تمثل نفسها كمتجه $Fe^{i\omega t}$ ، اضافة الى ان مركبات هذه القوة تصف سعاتها التي تؤثر على كل احداثي .

فاذا كان النظام المبحوث نظام محافظ ، لذلك فأن معادلة ذبذبته بهيئة ماتركسيه تأخذ الشكل التالي :

$$\hat{m}\ddot{\vec{X}} + \hat{k}\vec{X} = \vec{F}e^{i\omega t} . \qquad (4.23)$$

حل هذه المعادله كذبذبة اضطراريه للنظام ، أي الذبذبة التي تحدث على تردد القوه الخارجيه يمكن ان يكتب بالهيئه

$$\vec{X} = \vec{A}e^{i\omega t} . \qquad (4.24)$$

حيث $A$ - متجه ( Vector ) سعات الاهتزازات الاضطرارية

نعوض (4.24) في (4.23) نحصل على معادلة متجه السعة

$$(\hat{k} - \omega^2 \hat{m})\vec{A} = \vec{F} \qquad (4.25)$$

ومن هنا يكون لدينا

$$\vec{A} = (\hat{k} - \omega^2 \hat{m})^{-1} \vec{F}. \qquad (4.26)$$

وبهذا الشكل فان بحث معادلة الذبذبة الاضطراريه في الهيئه الماتركسيه يتطلب بالضرورة ايجاد الماتركس، ومعكوس الماتركس.

وعلى اساس الحل العام للمعادلة (4.26) يمكن استخلاص بعض الاستنتجات عن خصائص الذبذبات :- الماتركس $(\hat{k} - \omega^2 \hat{m})$ عند التردد $\omega$ المساوي لاحد الترددات الخاصه للنظام يؤول الى المالانهاية، لان محدد الماتركس ($Determent$) يساوي صفر . طبقا للمعادلة (4.10) من البند السابق .

وبهذا الشكل فعندما يكون $\omega = \omega_s$ في النظام تحدث الاستجابة . ومن جانب أخر يمكن بحث الاهتزازات الاضطراريه بطريقة أخرى يمكن في تحليل الحل المبحوث الى ذبذبة خاصه للنظام. ولأجل الغرض نحلل متجه السعه $\vec{A}$ الى متجه معامل قسة السعات $\vec{K}_s$ للذبذبات الخاصه للنظام :

$$\vec{A} = \sum_{s=1}^{n} B_s \vec{K_s} . \tag{4.27}$$

والآن تقودنا المهمة الى ايجاد المعاملات المجهولة $B_s$.
نحلل القوة الخارجيه الى متجهات قوى المرونة

$$\vec{F} = \sum_{s=1}^{n} f_s \hat{K} \vec{K_s} . \tag{4.28}$$

حيث $f_s$ - معامل التحليل ، ويمكن أن يوجد بأستخدام شرط تعامد الهياكل الخاصه ومتجهات قوى المرونه

$$\vec{K_s} \hat{K} \vec{K_s} = 0 .$$

نضرب المعادله (4.28) قياسيا في $\vec{K_s}$ ونكتب المعامل $f_s$ بالشكل التالي

$$f_s = \frac{\vec{F} \cdot \vec{K_s}}{K_s \hat{K} K_s} \tag{4.29}$$

نعوض المعادلتين (4.27) و (4.28) في المعادلة (4.25) نحصل

$$\sum_{s=1}^{n} \left[ B_s \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_s^2}\right) - f_s \right] \hat{K} \cdot \vec{K_s} = 0 \tag{4.30}$$

نستخدم الشرط الخاص بالتعامد ، من السهولة أن نحصل على المعادله الخاصه بالمعامل $B_s$ حيث

$$B_s = \frac{f_s}{1 - \omega^2/\omega_s^2} . \tag{4.31}$$

ومن هنا فان سعات الاهتزازات الاضطراريه تساوي

$$\vec{A} = \sum_{s=1}^{n} \frac{f_s \vec{K_s}}{1 - \omega^2/\omega_s^2} . \tag{4.32}$$

من المعادلة (4.32) يتضح بصورة مباشره أنه عند $\omega \to \omega_s$ فان سعات جميع الاحداثيات تؤول للمالانهاية أي أنه يحدث الرنين أو النمو الرنيني . الرنين أو الاستجابة على التردد $\omega_s$ يحدث اذا كان متجه القوه الخارجيه عمودي على الذبذبه الخاصه $S$ .

بالتوافق مع المعادله (4.29) ، فان المعامل $f_s$ في هذه الحاله يساوي صفر .

في النظام بدرجة $n$ من الحريه يمكن أن لايحصل النمو الرنيني حتى تحت تأثير القوه الخارجيه الا على احداثي واحد ( $\ell$ ) فقط . هذا سوف يكون في تلك الحالة : عندما تؤول $\mathcal{X}_{s\ell}$ على تردد معين $\omega_s$ الى الصفر ، اي أن الاحداثي $\ell$ يصبح عقدة للذبذبه $S$ .

بهذا الشكل يكون تأثير القوه في نقطة العقدة للذبذبه المطابقه .

مثال 4.3 : على الاحداثي $x_1$ في النظام المبحوث في المثال 4.2 ( شكل 4.2 ) تؤثر قوه هرمونيه او توافقيه $F(t) = F_0 \cos \omega t$ ، اوجد سعة الذبذبه في كل احداثي .

**الحل :** نظام المعادلات (4.23) بالنسبة للحالة المبحوثة يحصل من نظام المعادلات (4.7) عند اضافة القوه الخارجيه الهرمونيه الى المعادله الاولى في نظام معادلات المثال 4.2 .

$$\frac{m}{3}\ddot{X}_1+\frac{m}{6}\ddot{X}_2+CX_1=F_0\cos\omega t,$$

$$\frac{m}{6}\ddot{X}_1+2\frac{m}{3}\ddot{X}_2+\frac{m}{6}\ddot{X}_3+CX_3=0,$$

$$\frac{m}{6}\ddot{X}_2+\frac{m}{3}\ddot{X}_3+CX_3=0.$$

لحل هذا السؤال نستخدم في البدايه طريقة السعة المعقده . لاجل هذا الغرض نقترح :

$$F_0\cos\omega t\longrightarrow\tilde{F}_0\,e^{j\omega t},$$

$$X_1=\tilde{A}_1 e^{j\omega t};\quad X_2=\tilde{A}_2 e^{j\omega t};\quad X_3=\tilde{A}_3 e^{j\omega t}.$$

نعوض هذه الدوال في نظام المعادلات (4.23) ونعمل التحويلات العاديه ، نحصل على نظام جبري (4.25) بالنسبة للسعات المعقده المبحوثه :

$$(-\omega^2+n^2)\tilde{A}_1-\frac{1}{2}\omega^2\tilde{A}_2+0\cdot\tilde{A}_3=3\tilde{F}_0/m,$$

$$-\frac{1}{4}\omega^2\tilde{A}_1+\left(-\omega^2+\frac{1}{2}n^2\right)\tilde{A}_2-\frac{1}{4}\omega^2\tilde{A}_3=0,$$

$$0\cdot\tilde{A}_1-\frac{1}{2}\omega^2\tilde{A}_2+(-\omega^2+n^2)\tilde{A}_3=0.$$

بحل هذا النظام نحصل على مقادير السعات :

$$\tilde{A}_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}\frac{3\tilde{F}_0}{m} = \frac{3\tilde{F}_0}{m}\frac{\left(-\omega^2+\frac{1}{2}n^2\right)\left(-\omega^2+n^2\right)-\frac{1}{8}\omega^4}{\Delta},$$

$$\tilde{A}_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta}\frac{3\tilde{F}_0}{m} = \frac{3\tilde{F}_0}{m}\frac{\frac{1}{4}\omega^2\left(-\omega^2+n^2\right)}{\Delta},$$

$$\tilde{A}_3 = \frac{\Delta_{13}}{\Delta}\frac{3\tilde{F}_0}{m} = \frac{3\tilde{F}_0}{m}\frac{\frac{1}{8}\omega^4}{\Delta},$$

حيث

$$n^2 = 3c/m$$

نبحث سلوك السعات بالنسبة لجميع الاحداثيات بالاعتماد على تردد التاثير الخارجي $\omega$ ، وعندنا نشير الى الخصائص الاهتزازيه للنظام المبحوث في هذا المثال ، لاجل هذا الغرض نفتح المحدد $\Delta$ :

$$\Delta = \left(-\omega^2+n^2\right)\left[\left(-\omega^2+n^2\right)\left(-\omega^2+\frac{1}{2}n^2\right)-\frac{1}{4}\omega^4\right] =$$
$$= \frac{3}{4}\left(n^2-\omega^2\right)\left(\omega^2-\omega_1'^2\right)\left(\omega^2-\omega_3'^2\right),$$

حيث

$$\omega_1'^2 = n^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0,423n^2,$$
$$\omega_3'^2 = n^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1,58n^2;$$

جذور المحدد – مربعات ترددات الذبذبات الخاصه للنظام المبحوث ( المثال 2 . 4 ): $\Delta(0) = \frac{1}{2}n^6$.

بعد ذلك ، نجد اصفار البسط في تعبير الاحداثي الاول :

$$\left(-\omega^2+\frac{1}{2}n^2\right)\left(-\omega^2+n^2\right)-\frac{1}{8}\omega^4 =$$

$$=\frac{7}{8}\left(\omega^4-2\,\frac{6}{7}n^2\omega^2+\frac{4}{7}n^4\right)=$$

$$=\frac{7}{8}\left(\omega^2-\omega_1^2\right)\left(\omega^2-\omega_2^2\right),$$

حيث $\omega_1^2=n^2\,\frac{6-\sqrt{8}}{7}=0{,}454n^2;\ \omega_2^2=n^2\,\frac{6+\sqrt{8}}{7}=1{,}26n^2.$

في حدود المقادير الخاصه بالسعات يمكن أن نكتب الشكل التالي :

$$\tilde{A}_1=\frac{7}{2}\,\frac{\tilde{F}_0}{m}\;\frac{(\omega^2-\omega_1^2)(\omega^2-\omega_2^2}{(n^2-\omega^2)(\omega^2-\omega_1^2)(\omega^2-\omega_3^2)},$$

$$\tilde{A}_2=\frac{\tilde{F}_0}{m}\;\frac{\omega^2}{(\omega^2-\omega_1'^2)(\omega^2-\omega_3'^2)},$$

$$\tilde{A}_3=\frac{\tilde{F}_0}{m}\;\frac{\omega^4}{(n^2-\omega^2)(\omega^2-\omega_1^2)(\omega^2-\omega_3^2)}.$$

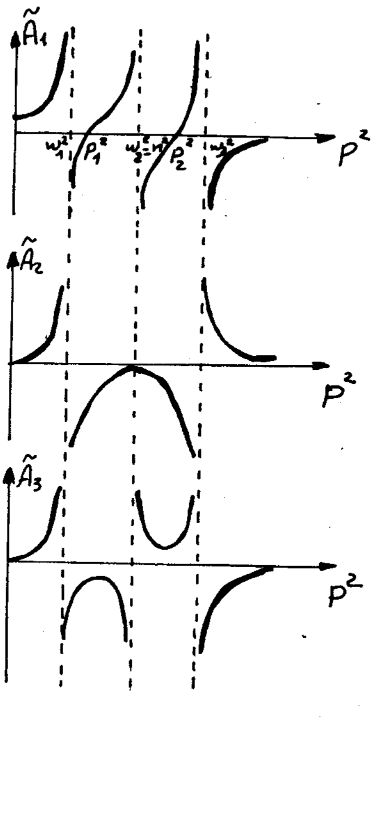
من هذا الوصف يمكن استنتاج مايلي :

1) الذبذبه بسعة $\tilde{A}_1$ تظهر مرتين على الترددات $\omega=\omega_1$ و $\omega=\omega_2$ وثلاث مرات تتناغم على الترددات الخاصه للنظام : $\omega=\omega_1'$ و $\omega=n=\omega_2'$ و $\omega=\omega_3'$

2) السعه $\tilde{A}_2$ (تتناغم تكون في حالة رنين) فقط مرتين على الترددات الخاصه $\omega_1$ و $\omega_3$ ، (لا يلاحظ) الرنين في احداثيات اخرى على التردد الخاص الثاني $\omega_2'=n$ .

3 ) السعه $\tilde{A}_3$ (تتناغم) على جميع الترددات الخاصة ا الثلاثة .

اعتماد السعات $\tilde{A}_1$ ، $\tilde{A}_2$ ، $\tilde{A}_3$ على تردد القوة الخارجيه $\omega^2$ وضّح على الشكل (4 . 3) (زيادة في التوضيح نعتبر التردد للقوه الخارجيه $P$ والتردد الخاص للنظام $\omega$ )




شكل (4 . 3)

2) نحل هذا المثال بطريقة التحليل الى الهياكل الخاصه .

الترددات الخاصه والمتجهات الخاصه لهذا النظام الاهتزازى التي وجدناها في المثال (4.2) تساوى :

$$\omega_1 = n\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}\,; \qquad \omega_2 = n = \sqrt{\frac{3C}{m}}\,;$$

$$\omega_3 = n\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}\,,$$

$$K_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2,47 \\ 1 \end{Bmatrix}, \qquad K_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix},$$

$$K_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,73 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

مصفوف الكتله يساوى :

$$M = \begin{Bmatrix} \frac{m}{3} & \frac{m}{6} & 0 \\ \frac{m}{6} & \frac{2}{3}m & \frac{m}{6} \\ 0 & \frac{m}{6} & \frac{m}{3} \end{Bmatrix}$$

متجـه سـعات القـوه الخـارجيـه التـوافقيـه :

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} \vec{\tilde{F}}_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

متجـــه ((قـوى العطـالـه ))

$$M\kappa_s \equiv M\varkappa_s = \begin{Bmatrix} \frac{m}{3}\kappa_{s_1} + \frac{m}{6}\kappa_{s_2} + 0 \\ \frac{m}{6}\kappa_{s_1} + \frac{2}{3}m\kappa_{s_2} + \frac{m}{6}\kappa_{s_3} \\ 0 + \frac{m}{6}\kappa_{s_2} + \frac{m}{3}\kappa_{s_3} \end{Bmatrix}.$$

نحـدد المعـامل $f_s$ فـي تحـليل القـوه : (4 . 29)

$$f_s = \frac{\vec{K_s} \cdot \vec{F}}{\vec{K_s} \cdot \vec{M}_{K_s}}.$$

النغمه الاولى ( الطراز الاول ) :

$$M_{K1} = m \begin{Bmatrix} 0,79 \\ 2,16 \\ 0,79 \end{Bmatrix}, \quad f_1 = \frac{\{1; 2,74; 1\} \begin{Bmatrix} \tilde{F}_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}{\{1; 2,74; 1\} m \begin{Bmatrix} 0,79 \\ 2,16 \\ 0,79 \end{Bmatrix}} = \frac{\tilde{F}_0}{7,5m}.$$

النغمه الثانيه او الطراز الثاني :

$$M_{K1} = m \begin{Bmatrix} 0,79 \\ 2,16 \\ 0,79 \end{Bmatrix}, \quad f_2 = \frac{\{1; 0; -1\} \begin{Bmatrix} \tilde{F}_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}{\{1; 0; -1\} m \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{Bmatrix}} = \frac{\tilde{F}_0}{\frac{2}{3}m}.$$

النغمه الثالثه او الطراز الثالث

$$M_{K3} = m \begin{Bmatrix} 0,21 \\ -0,15 \\ 0,21 \end{Bmatrix}, \quad f_3 = \frac{\{1; -0,73; 1\} \begin{Bmatrix} \tilde{F}_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}{\{1; -0,73; 1\} m \begin{Bmatrix} 0,21 \\ -0,15 \\ 0,21 \end{Bmatrix}} = \frac{\tilde{F}_0}{0,54m}.$$

نبني الحل (4 . 31) ثم نستخدم المعادله (4 . 32) لايجاد سعات الاهتزازات الاضطراريه :

$$\tilde{X}_s = \sum_{l=1}^{N} \frac{f_l \vec{K}_{sl}}{\omega_l^2 - p^2}:$$

$$\tilde{X}_1 = \tilde{A}_1 = \frac{\frac{\tilde{F}_0}{m}}{7{,}5(\omega_1^2 - p^2)} + \frac{\frac{\tilde{F}_0}{m}}{\frac{2}{3}(\omega_2^2 - p^2)} + \frac{\frac{\tilde{F}_0}{m}}{0{,}54(\omega_3^2 - p^2)},$$

$$\tilde{X}_2 = \tilde{A}_2 = \frac{2{,}74\frac{\tilde{F}_0}{m}}{7{,}5(\omega_1^2 - p^2)} + \frac{0 \cdot \frac{\tilde{F}_0}{m}}{\frac{2}{3}(\omega_2^2 - p^2)} + \frac{-0{,}73\frac{\tilde{F}_0}{m}}{0{,}54(\omega_3^2 - p^2)},$$

$$\tilde{X}_3 = \tilde{A}_3 = \frac{\frac{\tilde{F}_0}{m}}{7{,}5(\omega_1^2 - p^2)} + \frac{-1 \cdot \frac{\tilde{F}_0}{m}}{\frac{2}{3}(\omega_2^2 - p^2)} + \frac{\frac{\tilde{F}_0}{m}}{0{,}54(\omega_3^2 - p^2)}.$$

وهذه هي طريقه اخرى لحل المثال .

في حالة وجود الخمود فان حساب ذبذبات النظام بدرجة $n$ حريه يصبح اكثر تعقيدا .
فاذا كان الخمود يمتلك خصائص احتكاك لزج يمكن استخدام ماتركس تشتت الطاقه بالهيئه :

$$\hat{h} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} \cdots & h_{2n} \\ \cdots & \cdots \cdots & \cdots \\ h_{n1} & h_{n2} \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} . \qquad (4.33)$$

ثم نحل المعادله الماتركسيه التاليه :

$$\hat{m}\ddot{\vec{X}} + \hat{h}\dot{\vec{X}} + \hat{k}\vec{X} = 0 \qquad (4.34)$$

او

$$\hat{m}\ddot{\vec{X}} + \hat{h}\dot{\vec{X}} + \hat{k}\vec{X} = \vec{F} e^{i\omega t} . \qquad (4.35)$$

فالاهتزازات الخاصه للنظام يمكن بحثها بالهيئه :

$$\vec{X}(t) = \vec{A} e^{\lambda t} . \qquad (4.36)$$

نعوض المعادله (4.36) في المعادله (4.34) نحصل على

$$\left| \hat{m}\lambda^2 + \hat{h}\lambda + \hat{k} \right| = 0. \tag{4.37}$$

بما ان المعادله (4.37) تمتلك معاملات حقيقيه لذلك فان جميع جذورها المعقده سوف تكون مرافقات زوجيه ، اى ان

$$\lambda_s = -\delta_s + i w_s ; \quad \overset{*}{\lambda}_s = -\delta_s - i w_s . \tag{4.37}$$

حيث $\delta_s$ ، $w_s$ ــ اعداد حقيقيه .

يمكن ان نوضح انه بالنسبة للانظمه المشتته غير المحافظه والتي لاتحتوى على مصادر طاقه ، فان جميع $\delta_s < 0$ .

اما الكميات $\lambda_s$ فغالبا ما تسمى ترددات خاصه معقدة للنظام .

نعوض $\lambda_s$ في المعادله (4.36) من المعادله (4.37) ثم نحسب المعادله (4.34) نحصل على معادله لتحديد معامل قسمة السعات . في هذه الحاله سوف يكون معامل قسمة السعات معقدا .

الحل العام لنظام المعادلات (4.34) يمتلك الهيئه

$$\vec{X}(t) = \sum_{s=1}^{n} C_s e^{-\delta_s t} \vec{k}_s \cos(w_s t + \varphi_s). \tag{4.37}$$

وهنا تكون مركبات المتجه $\vec{k}_s$ معقده ويمكن التعبير عنها بالصوره التاليه :

$\mathcal{H}_{se} \exp[i \varphi_{se}]$ .

ذبذبة كل احداثي يمكن ان تمثل تركيب للذبذبات المتخامده ، اضافة الى ذلك وبسبب من ان معاملات قسمة السعات معقده ، لذلك فان الذبذبات بترددات $\omega_s$ وعلى الاحداثيات المختلفه تكون مزاحه بالطور على مقدار $\varphi_{se}$ .

السعه $C_s$ والطور $\varphi_s$ يتحددان عادة من الظروف الابتدائيه. عند بحث الذبذبات الاضطراريه في الانظمه المشتته بدرجة $n$ حريه ، من الضروري حل المعادله (4.35). نحلل متجه السعات للذبذبات الاضطراريه $\vec{A} e^{i\omega t}$ الى متجه قسمة السعات (متجه الهياكل الخاصه) $\vec{K}_s$ ، نحصل

$$\vec{A} = \sum_{s=1}^{n} \frac{f_s \vec{K}_s}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_s^2} + i\, 2\, \delta_s\, \omega^2/\omega_s^2} .$$

(4.38)

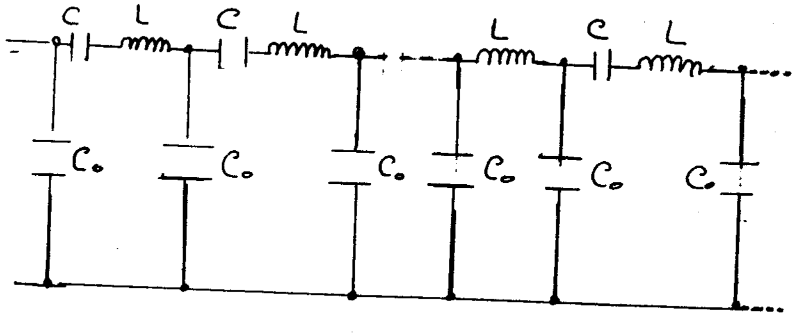
بهذا الشكل ، عند تطابق تردد القوه الخارجيه مع احد الترددات الخاصه للنظام ، عند ذلك يظهر الرنين في الانظمه المشتته ، لكن سعة الاهتزازات الاضطراريه (القسريه) في حالة الرنين تبقى محدوده .

## 4§- الذبذبات في السلاسل الكهربائيه المتجانسة :

تحليل الاهتزازات في الانظمه ذات $n$ من الدرجات الحريه يصبح اكثر سهولة اذا كان النظام بهيئة سلسلة لعناصر متجانسة مربوطه على التوالي .

ان بحث الاهتزازات الخاصه في مثل هذه السلاسل له أهمية فائقه كون هذه السلسلة تصبح مثالا مشابها للفلترات البلوريه المتكونه من ذرات متشابهة .

فالسلاسل الكهربائية والميكانيكيه المتجانسه في أنظمة الاهتزازات الاضطراريه تستخدم كمرشحات أو فلترات تمنع او تسمح لمجاميع من الترددات المحددة . على سبيل المثال :- نبحث الاهتزازات في سلسلة متجانسة كنموذج للفلترالشرائطي ( الذي يسمح او يمنع حزمة على هيئة شريط من الترددات ) كما مصوّر (بالشكل 4.4) :




شكل 4.4

تنتخب بهيئه احداثيات مستقلة( $q_l$ ) الشحنة التي تمر حتى اللحظه $t$ من الزمن خلال المقطع العرضي للملف المطابق $l$ .

نكتب في هذه الاحداثيات الطاقه المغناطيسية $T_M$ والطاقة الكهربائيه $T_E$ للنظام المتكون من $N+1$ من العناصر

$$T_M = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N+1} L\dot{q}_n^2 \quad و \qquad (4.39)$$

$$T_E = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N+1} \frac{q_n^2}{C} + \frac{(q_n - q_{n-1})^2}{C_0}.$$

معادلة لاغرانج لهذه السلسلة بالطاقه المعبر عنها في المعادلة (4.39) تمتلك الصوره التاليه :—

$$L\ddot{q}_n + \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_0}\right)q_n - \frac{1}{C_0}(q_n - q_{n+1}). \qquad (4.40)$$

المعادله (4.40) صحيحة بالنسبة لاية حلقة من السلسلة ماعدا الاولى والاخيره . الشحنه في الحلقه الاولى وفي الحلقه الاخيره من السلسله توجد بشروط محددة . نبحث نظام بنهايتين مفتوحتين اي ان

$$q_1 = 0; \quad q_{N+1} = 0 \qquad (4.41)$$

الحل الخاص لنظام المعادلات (4.40) نبحثه بالهيئة التاليه:

$$q_n = Q_n e^{i\omega t}. \qquad (4.42)$$

نحصل على العلاقات التي تربط سعات الذبذبات في عناصر السلسله المتجاورة (بعد اشتقاق المعادلة (4.42) مرتين وتعويضها في المعادله (4.40)):

$$(\nu^2 - \omega^2) Q_n - \alpha (Q_{n-1} + Q_{n+1}) = 0, \quad (4.43)$$

$$n = 2, 3, \cdots, N.$$

حيث

$\nu^2 = \frac{1}{LC} + \frac{2}{LC_0}$ — مربع التودد الثنائي

$\alpha = \frac{1}{LC_0}$ — معامل ارتباط.

حل نظام المعادلات (4.43) يمكن ان يكتب بالشكل التالي:

$$Q_n = A e^{jn\beta}. \quad (4.44)$$

بتعويض (4.44) في (4.43) نحصل

$$\nu^2 - \omega^2 - \alpha (e^{j\beta} + e^{-j\beta}) = 0. \quad (4.45)$$

ومن هنا

$$\cos\beta = \frac{\nu^2 - \omega^2}{2\alpha}. \quad (4.46)$$

حيث يمثل المقدار ( $\beta$ ) وطبقا للمعادلة (4.46) ازاحة الطور على عنصر واحد من عناصر السلسلة.

ولذلك فالمعادلة (4.46) التي تربط تردد الذبذبة وازاحة الطور ( $\beta$ )، تسمى معادلة تشتيت السلسلة.

أما المقادير الحقيقيه لـ ( $\beta$ ) فانها تمتلك مكانا فقط بالشروط التاليه :ـ

$$\frac{|\nu^2-w^2|}{2\alpha} \leq 1 ; \nu^2-2\alpha \leq w^2 \leq \nu^2+2\alpha. \quad (4.47)$$

لكل مقدار من مقادير $w$ في حدودها المبينه في المعادلة (4.47) يتطابق مع مقدارين لـ $\beta$ متساويين بقيمهما المطلقه ومتضادين بأشارتيهما.

وبهذا الشكل فالحل العام للمعادلة (4.43) يمتلك الهيئه التاليه :ـ

$$Q_n = A e^{j\beta n} + B e^{-j\beta n}. \quad (4.48)$$

ولايجاد الترددات الخاصه لاهتزازات السلسلة نستخدم الشروط المحددة في المعادلة (4.41)

$$A e^{j\beta} + B e^{-j\beta} = 0 ; A e^{j\beta(N+1)} + B e^{-j\beta(N+1)} = 0. \quad (4.49)$$

هذا النظام للمعادلات (4.48) يكون مشتركا وشائعا اذا كان :

$$\sin \beta N = 0 ; \quad \beta = \frac{2\pi}{N}. \quad (4.50)$$

وان

$$B = -A e^{-2j\beta}.$$

وبأستخدام المعادله (4.46) نجد التردد الخاص

$$\omega_s = \nu^2 - 2\alpha \cos\frac{\pi s}{N} = \nu^2 - 2\alpha \cos\frac{\pi s}{N} . \qquad (4.51)$$

وبما أن السلسلة بنهايتين مفتوحتين

$$q_1 = 0 \quad ; \quad q_{N+1} = 0 ,$$

تمثل نظام ب $(N-1)$ من درجات الحريه، لذلك فنحن نمتلك $(N-1)$ من الترددات المختلفة :

$$S = 1, 2, \ldots, N-1 .$$

موجودة على شريط شفافية النظام (4.47).

مقادير $S=0$ و $S=N$ تعطي الترددات الحرجة :

في الحالة عندما $S>N$ فمن المعادلة (4.51) نحصل نفس المقادير ل $\omega_s$ ، عندما $S<N$ .

أما من المعادلة (4.48) آخذين بنظر الاعتبار المعادلة (4.50) فيمكن أن نجد تعبيرا للسعة $Q_{ns}$.

فالمعامل الاول لهذه السعة $Q_{ns}$ (أي المعامل $n$) ينتسب الى رقم الحلقة ، أما المعامل الثاني ($S$) فينتسب الى رقم التردد الذاتي.

$$Q_{ns} = A_s \exp\left(\frac{j\pi S n}{N}\right) + B_s \exp\left(-\frac{j\pi S n}{N}\right). \qquad (4.52)$$

فعندما $S=0$ و $S=N$ فأن $Q_{ns}=0$ وهذا يعني أن سعات جميع الاحداثيات على التردد

الحرج تساوي صفر .

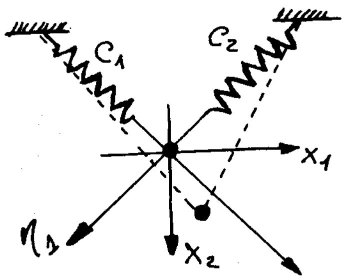
وبهذا الشكل فالذبذبه الخاصه للسلسلة المتكونة من $N + 1$ من العناصر بنهايتين مفتوحتين توصف بالهيئه التاليه :ـ

$$q_n = \sum_{S=1}^{N-1} D_s \sin \frac{\pi (n-1)}{N} \cos (\omega_s t + \varphi_s) \quad (4.53)$$

الكميات $D_s$ ، $\varphi_s$ تتحدد من الظروف الابتدائية .
الذبذبة الخاصة للحلقة $n$ من السلسلة تمثل تركيب أو مجموع من $N$ من الذبذبات الطبيعية .

## اسئلة الفصل الرابع

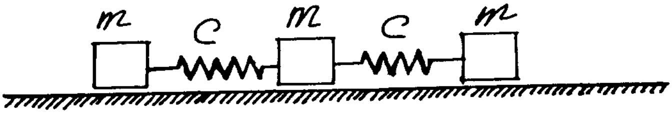
1 )) ثقل كتلته $m$ علق بنابضين متكافئي الطول $\ell$ .
صلابة النابضين $C1$ و $C2$ ( شكل 4.5 ) .
في الحاله غير المشوهه يترتب النابضان بحيث تكون الزاويه بينهما $90^\circ$ .
جد الترددات الخاصه ومتجهات الهياكل الخاصه للذبذبات الصغيره للثقل في المستوى الشاقولي ،
(تهمل قوة الجاذبيه) .




شكل 4.5

2)) ثلاثة اجسام متكافئه الكتل $m$ موجوده على سطح املس . ربطت هذه الأجسام بنوابض متكافئه صلابة كل منهم $C$ شكل 4.6 .
جد الترددات الخاصه ومتجهات الهياكل الخاصه .

واكتب الحل العام للمسألة .

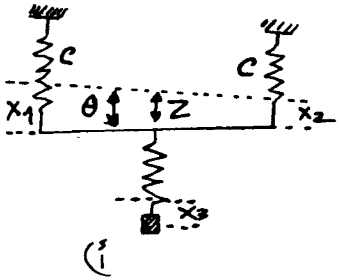


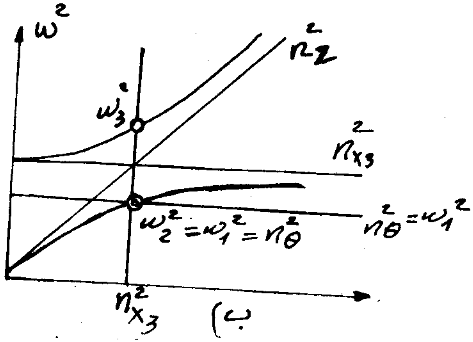

شكل 4.6

3 )) سلك صلد طوله $\ell$ وكتلته $m$ علق بنهايتي نابضين متكافئين صلابة كل منهما او مرونته $C$ . في مركز كتلة السلك وعلى نابض آخر صلابته $c$ علق ثقل كتلته $m_1 = \frac{1}{3} m$ ( لاحظ الشكل ( 4.7 )) .

جد الترددات الخاصه ومتجهات الهياكل الخاصه واكتب الحل العام تحت شرط ، ان عزم عطالة السلك بالنسبة لمحور يمر خلال مركز كتلته يساوي :

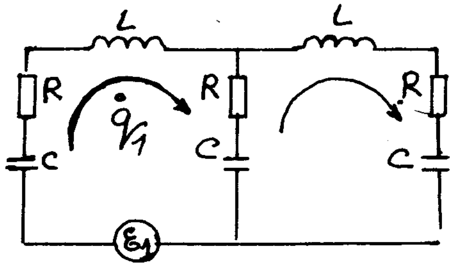
$$I_o = \alpha m l^2 = \frac{m l^2}{2(3-\sqrt{3})} .$$




شـكـل ( 4.7 )

4 )) جـد التـرددات الخـاصه المعقـده ومتجهـات الهيـاكـل الخـاصـه لنظـام كهـربائـي غيـر محـافـظ ومتمـاثـل ، المـوضح علـى الشكـل 4.8




شـكل (4.8 )

# الفصل الخامس

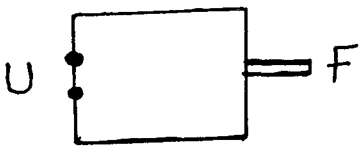
# الفصل الخامس

## الاهتزازات الكهروميكانيكيه والمماثله الكهروميكانيكيه

### الاهتزازات الكهروميكانيكيه

#### §1 معلومات عامه

في بعض الانظمه الماديه تتحقق او تحدث في ان واحد ذبذبات ميكانيكيه وذبذبات كهربائيه . خلال هذا تتصاحب او تترافق العمليات الاهتزازيه بتحول او انتقال معاد للطاقه من شكل لاخر . هذه الذبذبات تسمى بـ الذبذبات او الاهتزازات الكهروميكانيكيه ، بينما الانظمة التي تظهر فيها مثل هذه الاهتزازات تسمى بـ المبدلات .
بالاعتماد على ترتيب او بناء المبدلات فقد يحصل منها الكهرو-ميكانيكيه والميكانو-كهربائيه ، وعلى هذا الاساس تمثل المبدلات نفسها انظمه مرتبطه ،كما يبدو ذلك من التخطيط المقدم لاحد هذه المبدلات ذو درجة حرية واحده .




شكل 5.1 . تخطيط لمبدل بدرجة حرية واحدة .

ترتبط المقاييس الكهربائيه (القوه الكهربائيه المتحركه $E.D.C$ وقوة التيار الكهربائي $I$ ) مع المقاييس الميكانيكيه (القوه $F$ والسرعة $V$ ) خلال المعادلات التالية :

$$\bar{Z}_e \cdot I + \bar{Z}_1 \cdot V = U . \quad (5.1)$$

$$\bar{Z}_2 \cdot I + \bar{Z}_m \cdot V = F . \quad (5.2)$$

حيث $\bar{Z}e$ ترمز للممانعة الكهربائيه

(لاحقا سوف نرمز تحت مفهوم الممانعه $Z$ للمقاومه المركبة للنظام).

$\bar{Z}_m$ — تعني الممانعه الميكانيكيه

اعتمادا على هيئة او نوع المبدل تحقق الممانعات الكهربائيه — الميكانيكيه $\bar{Z}_1$ و $\bar{Z}_2$ العلاقات التاليه :

$$\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 \quad \text{أو} \quad \bar{Z}_1 = -\bar{Z}_2 . \quad (5.3)$$

العلاقت الميكانيكيه والكهروصوتيه اعتمدت في تطورها بدرجة رئيسيه على المبدلات ، الامر الذي احتلت معه دراسة هذه المبدلات اهمية كبيره للغايه . ولذا سوف نتناول ببحثنا المحدد هذا دراسة الاهتزازات الكهروميكانيكيه التي تظهر فى مكبر الصوت وفي الميكروفون وفى المبدلات ، ذات القاعده الكهربائيه .

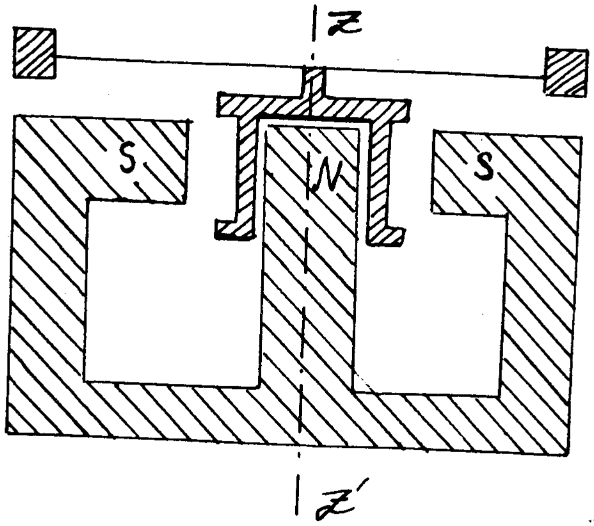
§2. مكبر الصوت الكهروديناميكي

في الاخدود الحلقي للمغناطيس الاسطواني الدائم $NS$ (شكل 5.2) يوضع باتجاه المحور $ZZ'$ ملف اسطواني .

يوجد الملف في مجال مغناطيسي قطري حثه $B$ وفيه يجري تيار كهربائي قوته $I$ . في هذه الظروف تؤثر على الملف قوة لبلاس موجهه باتجاه (لمحور $ZZ'$ (لاحظ الشكل 5.2).

$$F = B\ell I . \qquad (5.4)$$

حيث $\ell$ ـ الطول الكلي للملف او الوشيعه .




شكل 5.2 . مكبر الصوت الكهروديناميكي .

حينذاك ، ستكون معادلة الحركة الاضطراريه بالهيئه التاليه :

$$m\dot{V} + rV + k\int V \cdot dt = B\ell I . \qquad (5.5)$$

من جانب اخر يصبح الملف او الوشيعه واقعا في مجال نمو القوه الكهربائيه المتحركه $E.D.C$ للحث او يزاح فيه

$$U_i = B\ell \dot{V} .$$

اتجـاه $U_i$ عكس اتجـاه الجهـد المطـبق علـى الوشـيعه $U$ .
حينـذ اك سـتكون المعـادله الكهـربائية للسلسـلة كالتالى :

$$L.\dot{I} + R.I = U - B\ell V . \qquad (5.6)$$

فـي نظـام الجيـب والجيـب تمـام يصـبح

$$\bar{U} = U_m e^{j\omega t} .$$

يمكـن تحـديد $U$ مـن المعـادلة (6 . 5) بالشـكل التالي :

$$\bar{U} = (R + j\omega L)\bar{I} + B\ell\bar{V} . \qquad (5.7)$$

امـا السـرعة $\bar{V}$ فيمكـن تحـديدها مـن المعـادلة (5 . 5) بالصوره التالية :

$$\bar{V} = \frac{B\ell\bar{I}}{\tau + j(\omega m - K/\omega)} . \qquad (5.8)$$

بتعـويض المعـادلة (8 . 5) فـي (7 . 5) نحصـل علـى تعـبير للجهـد الكهـربائي $\bar{U}$ بالهيئـة التاليـه :

$$\bar{U} = (R + j\omega L)\bar{I} + \frac{B^2\ell^2\bar{I}}{\tau + j(\omega m - \frac{K}{\omega})} = \left(\bar{Z}e + \frac{B^2\ell^2}{\bar{Z}m}\right)\bar{I} . \qquad (5.9)$$

حيـث $\bar{Z}e$ ـ الممانعه الكهـربائيـه للمبـدل عـندما لا يكـون المـلف او الوشـيعة متحـركا . $\bar{Z}m$ ـ الممـانعه الميكـانيكيـه .

التعـبير $\frac{B^2\ell^2}{\bar{Z}_m} = \bar{Z}_c$ يسـمى الممـانعه ~~المتحـركيه~~
وتضـاف الـى $\bar{Z}e$ عـندما يكـون البنـاء (المبـدل) فـي حـالة الحـركـه .
التعـبير $\bar{Z} = \bar{Z}e + \bar{Z}c$ يسـمى الممـانعـه الكهـربائيـه الكـاملـه

اومقاومة الدخول للنظام .

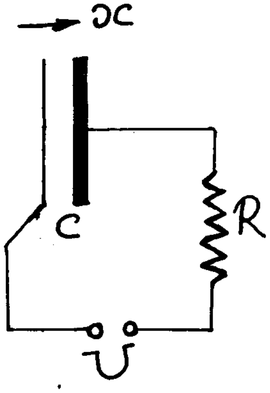
اما فيما يخص $\bar{Z}_e$ فيمكن تحليلها الى جزء حقيقي وجزء تخيلي :

$$\bar{Z}_c = R_c + jwL_c \; ; \qquad (5.10)$$

$$R_c = \frac{B^2 \ell^2 r}{Z_m^2} \; ; \; L_c = -\frac{B^2 \ell^2 (mw - K/w)}{w Z_m^2} \qquad (5.10)$$

§3. الميكروفون المكثفي او السعاتي

المكثفه المستويه الهوائيه (5.3) المشحونه بواسطة مولد Generator قوة كهربائيه متحركة ثابته E.D.C خلال مقاومة واحده R من صفائحها المتحركة بهيئة غشاء رقيق للغاية ، حيث تستطيع هذه المكثفه ان تنجز ازاحات صغيره عموديه على سطحها تحت تاثير ضغط الموجات الصوتيه . حينذاك تتغير سعة وشحنة المكثفه Q مما يحولها الى مبدل




شكل 5.3 مكثف الميكروفون

نفرض ان $C_o = \frac{\varepsilon_o S}{x}$ تمثل نفسها سعة المكثفه عندما يكون الضغط متكافئا على جانبي الغشاء المرقيق (او الصفيحه الغشائيه)

$S$ ـ السطح العرضي للصفيحه

$d$ ـ المسافه بين صفيحتين في حالة التوا زن (السكون)

عند الا ْزاحه الصغيره $x \ll d$ ، تكون السعه :

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d-x} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \cdot \frac{d}{d-x} = C_0 \frac{d-x+x}{d-x} = C_0\left(1 + \frac{x}{d-x}\right)$$

$$C \cong C_0 (1 + x/d) \cdot \qquad (5.11)$$

$$\frac{1}{C} = \frac{d-x}{\varepsilon_0 S} = \frac{d}{\varepsilon_0 S} \cdot \frac{d-x}{d} \cong \frac{1}{C_0}\left(1 - \frac{x}{d}\right) \cdot \qquad (5.12)$$

في حالة التوا زن (السكون) تكون الشحنه $Q_0$ مساويه لـ :

$$Q_0 = C_0 U \cdot$$

في حالة الحركه تصبح الشحنه $Q$ مساويه ل :

$$Q = Q_0 + q \quad , \quad (q \ll Q) \cdot$$

بما ان الغشاء الرقيق في حالة حركه ، فان الشحنه $q$ تتغير ، وهذا يصنع تيارا في السلسله الكهربائيه ، وبالتالي تصبح معادلة الذبذبات الكهربائيه للنظام بالهيئة التاليه :

$$U = R\dot{q} + \frac{Q_0 + q}{C} \cdot \qquad (5.13)$$

باستخدام المعادله ( 5 . 12 ) ، نحصل :

$$U \cong R\dot{q} + \frac{Q_0 + q}{C_0}\left(1 - \frac{x}{d}\right) \cdot \qquad (5.14)$$

او

( 5 . 15 )

$$R\dot{q} + \frac{q}{C_0} - \frac{U}{d}\cdot x = 0. \qquad (5.15)$$

وذلك عند اهمالنا للتعبير $\frac{q}{C_0 d}\cdot x$ .

القوه التي تؤثر على الغشاء الرقيق ( او الصفيحه الغشائيه ) تساوي ، حاصل ضرب الشحنه $Q$ × شدة المجال الكهروستاتيكي $E$ ،

$$E\cdot Q = \frac{U}{d-x}\cdot Q = \frac{U}{d}Q\cdot\left(\frac{d}{d-x}\right) =$$

$$= \frac{UQ}{d}\left(\frac{d-x+x}{d-x}\right) =$$

$$= \frac{UQ}{d}\left(1+\frac{x}{d-x}\right) \simeq \frac{U}{d}\left(1+\frac{x}{d}\right)(Q_0+q). \qquad (5.16)$$

اذا اهملنا التعبير $\frac{U q}{d^2}\cdot x$ ، فان الجزء المتغير للمعادلة (5.16) سوف يكون $Uq/d$ . حينذاك تكتب معادلة الاهتزازات الميكانيكيه للمبدل بالهيئة التالية :

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx - \frac{U}{d}\cdot q = 0. \qquad (5.17)$$

## §4. المبدل الكهربائي الضغطي او الكهرو إجهادي

المبدل الكهربائي الضغطي يمثل نفسه صفيحة بلورية ذات جانبين متوازيين ، لاتمتلك مركزا للتماثل ، خاضعة لضغط متجانس عموديا على جانبيها . في هذه الظروف تظهر عند الجانبين المتوازيين شحنات كهربائيه متساويه وباشارات متعاكسه .

كمية هذه الشحنات $Q$ تتناسب طردا مع القوة المؤثره و تساوى :

$$Q = K \cdot F' . \qquad (5.18)$$

حيث $K$ ثابت يعتمد على درجة الحراره . هذه الظاهره تظهر على سبيل المثال في حالة التأثير الميكانيكي على صفائح الكوارتز وفوسفات البوتاسيوم وغيرها .

اذا كان سمك الصفيحة يخضع لتغيير الكميه $x$ ، فان المعادلة الميكانيكيه في هذه الحالة سوف تكون :

$$\mu \ddot{x} + c \dot{x} + k x = F + \frac{Q}{K} . \qquad (5.19)$$

حيث $\mu$ — معامل العطاله ،

$C$ — معامل الاحتكاك الداخلي ،

$k$ — معامل المرونة .

القوة $F$ التي تؤثر على الصفيحة ، ترتبط مع $x$ من خلال مقياس المرونة لمادة الصفيحة غير الكهربائية الضغطية .

في حالة الصفيحة الكهربائية الضغطيه من الضروى اضافة القوة $F'$ المحددة بالمعادلة (5.18) الى أوسع القوه $F$ .

لكن يتحقق تاثير معاكس ايضا : فرق الكمون $V'$ الموجود بين جانبي الصفيحة المتقابلين يصنع او يُحدث تغييرا للكميه $x$ التي تمثل سمك الصفيحة :

$$x = K' . V' . \qquad (5.20)$$

اذا وضعت الصفيحة في مُكثفه (محققة بذلك دور موصل للمكثفة ) ، لسلسله كهربائيه فالمعادلة الكهربائية لهذه السلسله ستكون :

$$L \ddot{Q} + R \dot{Q} + \frac{Q}{C} = V_1 + \frac{x}{K'} . \qquad (5.21)$$

حيث $V_1$ — ترمز للجهد (او الشده) التي تتوافق مع شحنة المكثفه ذات السعه $\mathcal{E} C_0$ ( $C_0$ — سعة المكثفه في الفراغ ،
$\mathcal{E}$ — ثابت التوصيل الكهربائي النسبي للبلوره ) .
$\frac{x}{K'}$ - وهذه تعني الجهد او الشده التي تتوافق مع تغير سمك الصفيحة طبقا للمعادلة (5.20) .

## 2 . المماثله الكهروميكانيكيه

تشغل المماثله الكهروميكانيكيه مكانا هاما في مجال بحث ذبذبات المهتزات الميكانيكيه والكهربائيه، الامر الذى يستلزم المماثله ايضا بين الظواهر الميكانيكيه والكهربائيه قيد البحث .

لذلك غالبا مايتم تصميم نماذج كهربائيه للانظمه الميكانيكيه المهتزه .

الافضليات الاساسيه لهذه النماذج الكهربائيه هي ملائمة البناء او التركيب الكهربائي ، استقرار المركبات الكهربائيه ودقة القياسات الكهربائيه .

يوجد نوعان من المماثله الكهروميكانيكيه :

سوف نستخدم المماثله الكهروميكانيكيه ، التي تصبح فيها الكميه الاساسيه او القاعده هي عباره عن مفهوم الممانعه . في هذه الحاله تتوافق القوه الميكانيكيه مع الشده الكهربائيه او الاجهاد ، بينما تتوافق السرعه مع قوة التيار الكهربائي .

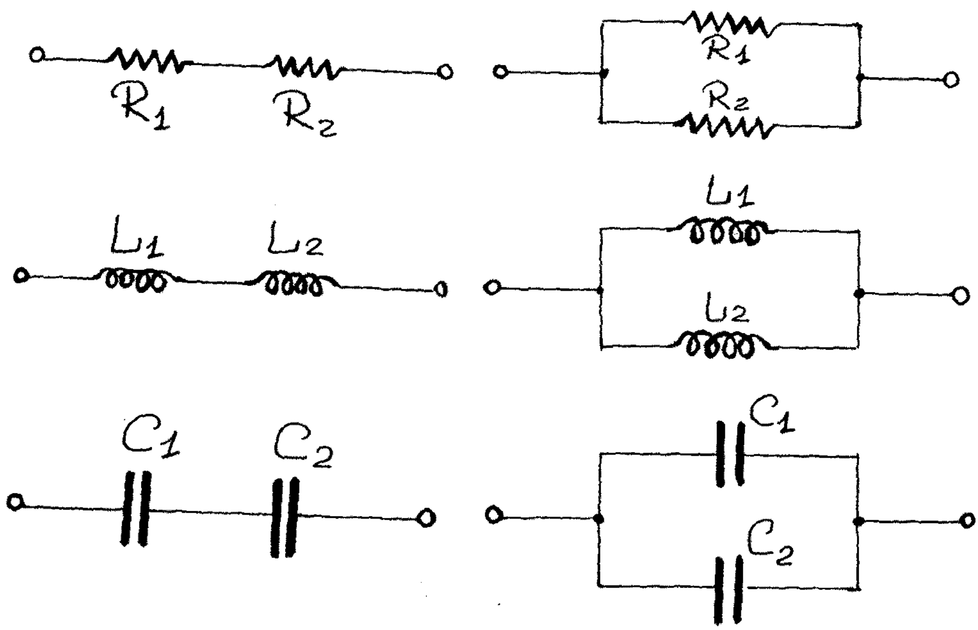
يبين الجدول رقم 1 التوافق بين الكميات الميكانيكيه والكهربائيه على اساس المماثله الكهروميكانيكيه .

جدول رقم 1 . المتكافئات الكهروميكانيكيه

| الانتقال او الحركه الانتقاليه | الدوران | الكميات الكهربائيه |
|---|---|---|
| الازاحه $x$ | زاوية الدوران $\alpha$ | الكميه الكهربائيه $q$ |
| السرعه $\dot{x}$ | السرعه الزاويه $\dot{\alpha}$ | قوة التيار $I = \dot{q}$ |
| التسارع $\ddot{x}$ | التسارع الزاوى $\ddot{\alpha}$ | |
| الكتله $m$ | عزم العطاله $J \equiv I_0$ | الحثيه $L$ |
| معامل المرونه $K$ | صلابة الفتل $C$ | السعه $C$ |
| اللزوجه ( الاحتكاك الداخلي ) $\tau$ | اللزوجه (الاحتكاك الداخلي ) $\tau$ | المقاومه الاوميه $R$ |
| القوه $F$ | العزم $\Gamma$ | الجهد الكهربائي $V$ |

| الانتقال او الحركه الانتقاليه | الدوران | الكميات الكهربائيه |
|---|---|---|
| الطاقه الكامنه $\frac{1}{2}Kx^2$ | الطاقه الكامنه $\frac{1}{2}C\alpha^2$ | الطاقه الكهربائيه $\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ |
| الطاقه الحركيه $\frac{1}{2}mV^2$ | الطاقه الحركيه $\frac{1}{2}J\omega^2$ | الطاقه الكهروحركيه $\frac{1}{2}LI^2$ |
| دالة الخسران $\frac{1}{2}zV^2$ | دالة الخسران $\frac{1}{2}z\omega^2$ | دالة الخسران $\frac{1}{2}RI^2$ |
| الممانعه $F/V$ | الممانعه $\Gamma/\omega$ | الممانعه $V/I$ |
| نفس الازاحه الواحده | نفس زاوية الدوران الواحده | البناء او التركيب المتوالي |
| نفس القوه الواحده | نفس العزم الواحد | البناء او التركيب المتوازى |
| | | الحث المتبادل $M$ |

من نظـريـة السـلاسـل الكهـربائيـه تعـرف العـلاقات التاليه (شكل 5.4 )




1)

2)

شـكل 5.4

ربـط المقـاومـات ، المـلفـات (او الـوشـائـع) والمكثفـات

1 – ربـط متـوالـي

2 – ربـط متـوازى .

## المقاومه العامه

(1) السلسله المتواليه :

$$R = R_1 + R_2 \qquad (5.22)$$

(2) السلسله المتوازيه :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad (5.23)$$

## الحثيه العامه

(3) السلسله المتواليه :

$$L = L_1 + L_2 \qquad (5.24)$$

(4) السلسله المتوازيه :

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \qquad (5.25)$$

## السعه العامه

(5) السلسله المتواليه :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad (5.26)$$

(6) السلسله المتوازيه :

$$C = C_1 + C_2 \qquad (5.27)$$

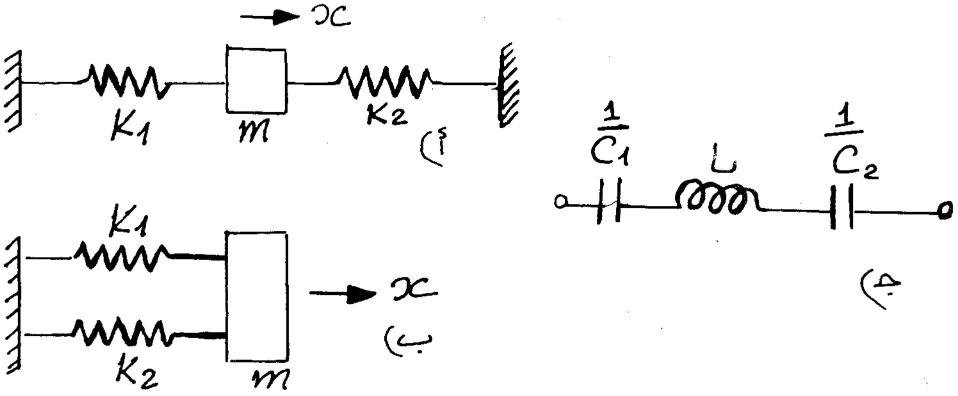
طبقا لنظام المماثله المأخوذ به تعتبر عناصر البناء الميكانيكي مرتبطه على التوالي اذا كانت فيها السرعه او الازاحه هي نفسها واذا كانت القوى المؤثره عليها تجمع .

على العكس من ذلك : تعتبر عناصر التركيب الميكانيكي مرتبطه على التوازى اذا كانت القوه المؤثره عليها هي نفسها واذا كانت سرع هذه العناصر تجمع .

امثله :

1 . النابضان المؤثران على الكتله $m$ (شكل 5.5 أ وب ومماثله الكهربائي 5.5 جـ ) مرتبطان على التوالي لأن الأزاحه $x$ للكتله $m$ تصنع القوى التي تجمع $F_1=K_1x$ و $F_2=K_2x$

( هنا لايُحدِّد تشكيل عناصر النظام طبيعة الربط ، بل السرعه هي التي تحدد ذلك )




شكل 5.5 أ و ب

شكل 5.5 جـ

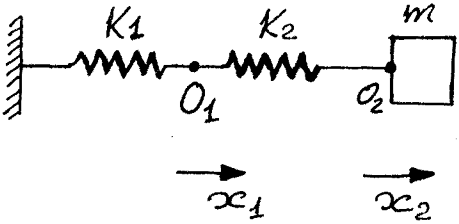
الربط المتوالي للنوابض ومماثله الكهربائي

في هذه الحاله سوف يكون معامل مرونة النابض المكافي معبرا عنه بالهيئة التاليه :

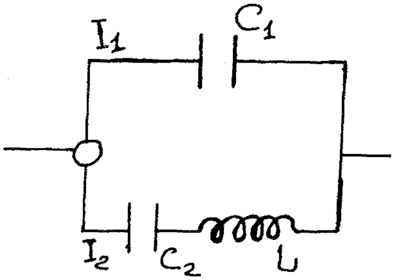
$$K = K_1 + K_2 . \qquad (5.28)$$

2 . النابضان الموضحان على الشكل ( 5.6 أ ) يعتبران مربوطان على التوازى ، لأن الازاحه $x$ للكتله $m$ تصبح مجموع الازاحتين $x_1$ للنقطة $O_1$ و $x_2$ للنقطة $O_2$ . التركيب الكهربائي المماثل للشكل ( 5.6 أ) وضح على الشكل ( 5.6 ب ):

$$x_1 = \frac{F}{K_1} , \quad x_2 = \frac{F}{K_2}$$




شكل 5.6 أ




شكل 5.6 ب

التركيب الميكانيكي المتوازى ومماثله الكهربائي

معامل المرونه (الصلابة ) للنابض المكافي يكون :

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} . \qquad (5.29)$$

من المعادلتين (5.28 ) و (5.29 ) ينتج ان $\frac{1}{K}$ يتوافق مع $C$ ( $K$ــ صلابة النابض و $C$ــ سعة الدائره الكهربائيه ) .

النابض يحفظ طاقته ( الكامنه ) بفضل صلابته او مرونته ، بينما الدائره الكهربائيه تحفظ طاقتها بفضل سعتها :

$$U_M = \frac{1}{2} k x^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = U_E \, .$$

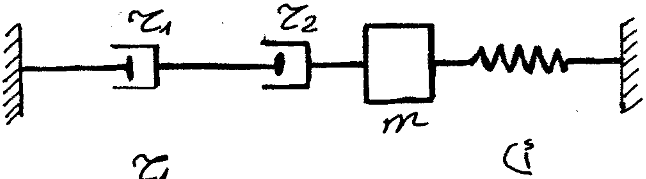
بحث امثله اخرى مشابهه ، متعلقه بمعاملات الاحتكاك الداخلي ( اللزوجة ) يعطي العلاقات التاليه :

<u>الربط المتوالي ( شكل 5.7أ )</u>

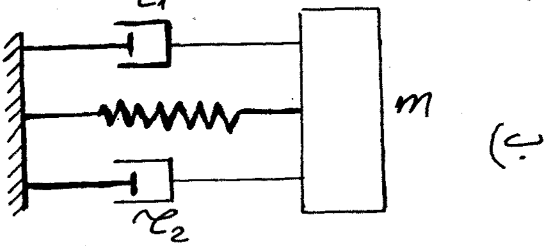
$$\tau = \tau_1 + \tau_2 \qquad (5.30)$$

<u>الربط المتوازي ( شكل 5.7 ب )</u>

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \, . \qquad (5.31)$$




شكل 5.7 أ




شكل 5.7 ب

شكل 5.7 . ربط مخمدات الاهتزازات او الصدمات

أ): ربط متوالي . ب): ربط متوازي

المعادلات التفاضليه التي تصف حركة النظام الميكانيكي تحدد سرعة او ازاحة كل كتله من كتل النظام وعددها يساوى عدد هذه الكتل .

اما التخطيط او البنا * الكهربائي المكافئ* يمتلك عددا من الحلقات ( سلاسل او خلايا ) مساويا لعدد الحثيات ( الملفات او الوشائع ) التي تتوافق مع الكتل (الموافقه للكتل ) الداخله في تركيب النظام الميكانيكي ) .

ازاحات او سرع العنصر المرن الواحد لنظام ميكانيكي يمكن ان تختلف من نهاية الى اخرى للعنصر الواحد نفسه . في هذه الحاله يصبح من الضروري حساب وتقييم هذه الازاحات او السرع في هاتين النقطتين المتقابلتين على نهايتي العنصر موضوع البحث .

قوة رد الفعل المؤثره بين عنصر متحرك واحد ونقطه واحده غير متحركه تمتلك من حيث المماثله سعه متواليه .

اما اذا اثرت هذه القوه بين عنصرين متحركين ، فالتماثل في هذه الحاله سيكون سعه متوازيه .

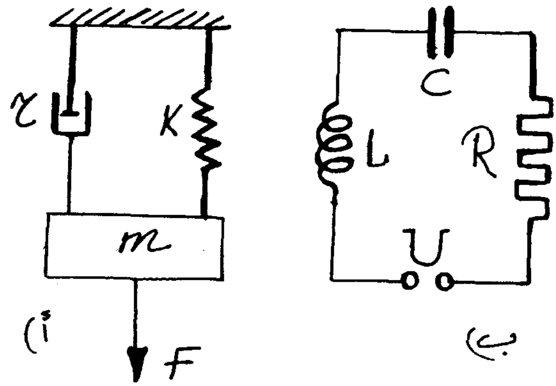
امثله

:

1 . في التركيب الموضح على الشكل ( 15.8 ) تخضع الكتله $m$ لقوة تساوى مجموع القوه الثابته $F$ والقوتين المؤثرتين من قبل النابض ومخمد الاهتزازات .

بما ان سرعة النابض والمخمد تساوى سرعة الكتله $m$ ، اى ان السرعه واحده للجميع لذلك ، فان السلسله

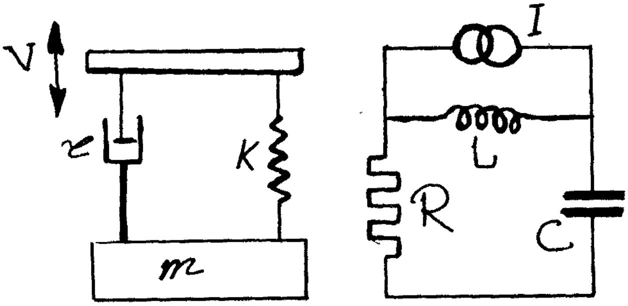
الكهربائيه المكافئه سوف تتركب من عناصر مربوطه على التوالي (شكل 5.8 ب)




شكل 5.8 أ شكل 5.8 ب

شكل 5.8 . التركيب الميكانيكي وتصميمه الكهربائي المكافىء .

تركيب العناصر الموضح على الشكل 5.9أ .
هو نفسه المعروض على الشكل 5.8أ ، لكن المسند $S$ (نقطتي الارتكاز او العارضه) هنا احدث ازاحه $x$ وسرعه $V$. تحصل الازاحه $x$ في آن واحد لكل من النابض والمخمد ، المتوافقان مع السعه $C$ والمقاومه $R$ في سلسله كهربائيه متواليه .




أ) ب)

شكل 5.9 أ شكل 5.9 ب

شكل 5.9 . تركيب ميكانيكي وتصميمه الكهربائي المكافيء .

ازاحة الكتله $m$ تساوى الفرق بين ازاحة المسند $S$ وبين ا زاحتي النابض والمخمد . وسرعتها هي عباره عن فرق سرعة المسند وسرعتي النابض والمخمد .

المولد في هذه الحاله موا زى للحثيه $L$ من جانب ومتوالي مع السلسله $RC$ من الجانب الاخر .

# الفصل السادس

# الفصل السادس

## الانظمة اللاخطيه البسيطه

### 1 .§ - الانظمه اللاخطيه ( معلومات عامه )

نظرية الذبذبات اللاخطيه اوما يسمونها احيانا ، الميكانيكا اللاخطيه ، تُدرَس بحث الحركات الاهتزازات الدوريه ، الموصوفه بمعادلات تفاضليه لاخطيه . الانظمه التي تنجز مثل هذه الحركات ، تسمى عادة انظمه لاخطيه (1) . بهذا الشكل تعني الميكانيكا بحث الحركات الدوريه للانظمه اللاخطيه .

بالمقارنة مع النظريه الخطيه تصبح الميكانيكا اللاخطيه تعميقا لاحقا لمعارفنا بقوانين الحركة الميكانيكيه . بالتحرر من كثير من التصميمات الفنيه للنظريه الخطيه تعطى الميكانيكا اللاخطيه كقاعده تصورات اكثر دقة وتكاملا عن صفات الحركات الاهتزازيه للانظمة الميكانيكيه . جوهر الامر يكمن فى ان (( الخطيه )) صفه نادراً ماتحصل او يظهرها النظام

---

1) تعبير الانظمه اللاخطيه يستعمل لاحقا ايضا بمعنى نظام المعادلات التي تحدد حركة النظام اللاخطي .

نفسه سواء فى بنائه اوفي طبيعته الفيزيائيه .

في معظم الحالات تعني الخطيه نتيجة تبسيط النظام الحقيقي الذي يتحقق غالبا باهمال حدود الدرجة الثانيه فما فوق من معادلة الحركة بالنسبة للاحداثيات والسرعه . هكذا ، على سبيل المثال تصاغ المعادلات الخطيه للذبذبات الصغيره للانظمه المرنه حول اوضاع توازنها المستقره .

استنادا على افتراض ان النظام الذي حصل على اثاره ابتدائيه صغيره الى مافيه الكفايه في حركته المثاره اللاحقه يحل في اقرب تقاطع للحاله غير المثاره (1). في تعابير الطاقه الحركيه والكامنه يتم الاحتفاظ فقط بحدود الدرجه الدنيا ، مع اهمال جميع الحدود الاخرى ذات الترتيب الاعلى والصغيره الى المالانهايه .

في النتيجه تقود مثل هذه العمليه الى المعادلات الخطيه للحركه بمعاملات ثابته .

دراسة الانظمه الخطيه المبنيه بمثل هذه الطريقه الفنية ، تعطي في الحقيقه امكانية عمل خلاصه عن صفات وخصائص اهتزازات هذه الانظمه ، ذات فوائد جمه في كثير من الحسابات العمليه .

---

((1)) التي تؤخذ كبداية لحساب الاحداثيات والطاقه الكامنه .

في احيان كثيره ورغم ان خطية النظام تتحقق عن طريق اهمال تلك الكميات الصغيره للغايه ، لكنها تعطي مجموعة تصورات مبسطه لعمليات حقيقيه ذات نتائج كميه ، يصعب الحصول عليها في حالات نادره حتى في الحسابات الموجهه والدقيقه .

في كل الاحوال فان ، الخطيه تحد من امكانية الكشف الكامل والمتعدد الجوانب ولجميع الصفات الاهتزازيه للانظمه .

غالبا ما تقود الخطيه الى استنتاجات خاطئه عن سلوك الانظمه وبالتالي تصبح هذه الخطيه غير مسموح بها .

هنا نذكر بعض الحقائق العامه المعروفه من هذا القبيل .

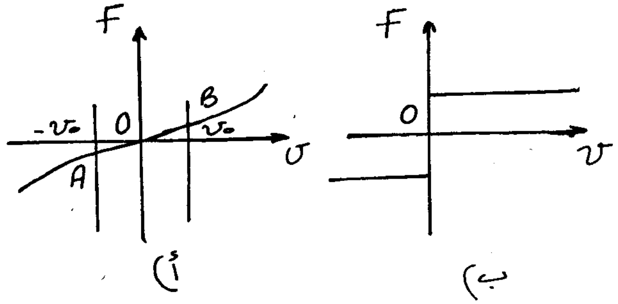
كما هو معروف ، مقاومة الوسط ( في الغالب كما تسمى الاحتكاك اللزج ) تعتمد على السرعة ومع نقصان هذه الاخيره يمكن ان تصبح المقاومه صغيره الى الحدود القصوى .

طبيعة مثل هذه المقاومه description تمتلك هيئة المنحني على الشكل 6.1 ،

في نظام الاحداثيات ( $\mathcal{V}$ و $F$) حيث $F$ قوة المقاومه ، $\mathcal{V}$ – السرعه .

الاحتكاك اللزج) تعتمد على السرعة ومع نقصان هذه الاخيره يمكن ان تصبح المقاومه صغيره الى الحدود القصوى .

طبيعة مثل هذه المقاومه descnibtion تمتلك ميثه المنحني على الشكل 1 . 6 ، وفي نظام الاحداثيات( $v$ ، $F$ ) ، حيث $F$ — قوة المقاومه ، $v$ — السرعه .

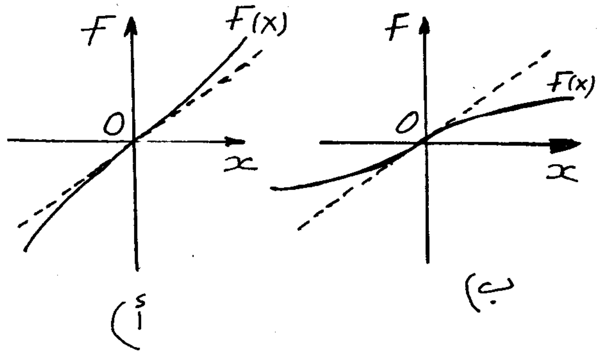



شكل 1 . 6

بالنسبة للسرع غير الكبيره ، على سبيل المثال بحدود $-v_0 \leq v \leq v_0$ ، حيث لا يختلف المنحني تقريباً عن مستقيم خطيه المقاومه ، أي ماينوب عن الجزء $AB$ ، للمنحني والذي يصبح تقريبا خطا مستقيما ، لأن المستقيم

يظهر صفات المقاومه . العمل يصبح بصوره معاكسه في حالة الاحتكاك الجاف، الذي خصائصه المبسطه وُضّحت على الشكل 6.1 . خطية المعادلات في حالة الاحتكاك الجاف غير ممكنه ، بسبب القطع او الانفصال الصغير الكائن ، الذي تحدث من خلاله تغيرات السرعه قرب بداية الاحداثيات .

كثير جدا من المواد الضروريه في بناء الماكينات لا تخضع لقانون هوك *Hook's low* وللتشويهات الصغيره . خصائص التمدد او الانضغاط ، على سبيل المثال لمواد مثل الجلد ، المطاط ، الكونكريت.....الخ هذه المواد لا تمتلك اجزاء خطيه مستقيمه . القيم المطلقه لمرونة هذه المواد تتغير مع كمية التشويه . على الشكل 6.2 عرضت خصائص التمدد ( والانضغاط ) لمثل هذه المواد




شكل 6 . 2

بالاعتماد على وضع المنحني ( K ) F بالنسبة الى الخط المستقيم ( الذي يتفق مع الخصوصية الخطية ) فان المماس لهذا المنحني في بداية الاحداثيات ( التنقيط على الشكل 2 . 5 ) سيعني نظاما صلبا على الشكل ( أ ) 2 . 6 ، وعلى الشكل ( ب ) 2 . 5 يعني نظاما رخواً . مثل هذه الامثلة للمواد التي أشرنا اليها سابقا ، من الواضح أنه لا يمكن حسابها بالنظرية الخطية ، ولكن هذه الصفات بالذات تمتلك احيانا مقادير كبيرة ، على سبيل المثال ، عند حساب اهتزازات الرنين والمتانة الديناميكية . تردد ذبذبات معادن بعض الاجهزة ، المتضمنة لعناصر من تلك المواد التي نحن بصددها ، تعتمد ( الترددات ) على سعة الذبذبات . في بعض الحالات تنمو الترددات مع زيادة السعة ( نظام صلب ) ، في حالات اخرى على العكس تتناقص ( نظام رخو ) .

وجود مثل هذه العناصر اللاخطية للانظمة الاهتزازية يمكن أن يضعف لدرجة كبيرة أحيانا تأثيرات ونتائج الرنين . زيادة السعة تسبب تغيير التردد ، وهذا الاخير يعمل على مغادرة اخراج النظام أتوماتيكيا من ظروف الرنين .

المثال الساطع للخطية يمكن استخدام نظام الماصة الاعتيادية ذات البندول ، التي تحدد إمكانية معرفة الصفات الاهتزازية العامة للخطية التي تتضمن على سبيل المثال حركة الثقل الساقط . المثال

... الهندسيه البندول يختفي ان انحرافا ف البندول
عن وضع التوازن الشاقولي صغير للغاية.
فاشكال هذه التذبذبات الصغيرة للبندول سوف
تماثل الزوايا اذا أُكسب هذا البندول اثاره ابتدائيه
... زاويه الانحراف صغيره ) .
ومن السهل التأكد عند الاثاره الابتدائيه
الكبيره للبندول المعروف لدينا بعد ذلك أنه
سوف تحصل ذبذبات محدده بسعات متناقصه
تدريجيا ، طالما لم يتوقف بعد في الوضع الشاقولي.
بالاضافه لهذه الاثاره الابتدائيه الصغيره لاتعمل
الساعه ، لان مصدر تعويض الطاقه التي يصرفها
البندول ( الجسم الساقط) في مثل هذه الذبذبات
غير موجود .

بهذا الشكل ، فان نظام الساعه ذات البندول
لايوفر امكانيه اثبات تلك الصفات ، التي تصبح
الاكثر خصوصية لانظمة الساعات ، كأجهزه
لقياس الزمن ؛ هذه الصفات تظهر فقط عند
الاثاره الابتدائيه الكبيره بما فيه الكفايه ،
وفي حالة الذبذبات ذات السعات النهائيه
المحدوده . عندما يحصل البندول اثاره أكبر من
بعض الحدود ، فانه في حركته المستقبليه يقود
نفسه بشكل يختلف بحدة عن ما جرت عليه
العاده في النظريه الخطيه لسلوك النظام
عند وجود المقاومه . سعات ذبذبه البندول
تبدأ تنمو أو تنقص ، مقتربة بهذه الحالة أو تلك

الى مقدار حرج قياسي واحد ، الذي عند بلوغه تتوقف من التغيّر بعد ذلك ، بحيث ان البندول ينجز ذبذبات مستقره ذات ابعاد واحده محققة حسابات زمنيه متكافئه الى حد ما . اكتشاف تحقق مثل هذه الحركه الدوريه periodical Motion المستقره في النظام عند وجود المقاومه ، مع بقائها بحدود النظريه الموصوفه بواسطة الخصائص المذكوره آنفا للحركه ، ليس ممكنا بطبيعة الحال .

التفسير الخطي للمشكلات المتعلقه بذبذبات بندول الساعه يرتبط برفض بحث الصفات الاهتزازيه الاكثر أهمية من وجهة النظر العمليه ، للانظمه الاكثر خصوصيه من حيث دورها واستخداماتها كان ممكنا تقديم امثلة اخرى ، حيث التفسير الخطي للمسائل المتعلقه بالاهتزازات ليس لا يعطي فقط امكانية اكتشاف ومعرفة صفات اهتزازيه هامه كثيره في الانظمه ، بل حتى يضيق من تلك الصفات التي تمت برهنتها واثباتها . صف الانظمه اللاخطيه واسع الى ما لا نهايه واكثر تنوعا من منطقة بناء الانظمه الخطيه الضيقه وكان من غير المجد وغير النافع تعداد او محاولة حساب خصوصيات الانظمه اللاخطيه التي لم تشر اليها النظريه الخطيه، لكن بعض الصفات العامه للانظمه اللاخطيه

المرتبطه بتحديد مهمات بحثنا اللاحق ، يمكن الاشارة اليها الان مبدئيا بحدود اختلافها الخصوصي عن الانظمه الخطيه .

لتلك الصفات ينتسب مايلي :

1 . لانستخدم مبدا التركيب الخطي Linear Superposition في الانظمه اللاخطيه ، ذلك لان التركيب الخطي

linear superposition لحركتين اهتزازيتين أو اكثر لنظام لاخطي لن يكون ذبذبة . يمكن القول ، بشكل آخر : من الحلول الخاصه المحصله للمعادلات التفاضليه للانظمه اللاخطيه لا يمكن صياغة حل عام ، مشابه لذلك الحل الذي يشكله الحل العام لنظام المعادلات الخطيه .

اذا حللت القوه المؤثره على النظام الى مسلسل فوريه ، فان تاثيرها على النظام اللاخطي سوف لن يكون مساويا للمجموع الخطي لتأثيرات الحدود التوافقيه في مسلسل فورييه كل على انفراد .

2 . الذبذبات الحره للأنظمه الخطيه دائماً متخامده . هذه واحده من الصفات الاساسيه للذبذبات الخطيه : في الظروف الحقيقيه يكون تاثير المقاومه على النظام الخطي معبرا عنه بنقصان انحراف النظام عن وضع التوازن الذي يبدو بشكل ما ، أنه الحاله المستقره الوحيده لمثل هذا النظام .

الذبذبات الدورية جداً ( الصافيه ) في الانظمه الخطيه ممكنة فقط بهيئة مايسمى الذبذبات الاضطراريه ،الناتجه بتأثير الاثارات الخارجيه لقوى دوريه .

في الانظمه اللاخطيه وعند وجود المقاومه يمكن أن تحصل الذبذبات الحره المستقره الصارمة التكرار . نقصان الطاقه في بعض الانظمه اللاخطيه يمكن أحيانا أن يعوّض أوتوماتيكيا بمعالجة هذه النقص من المصادر اللاخطيه ،وعلى شكل جرعات يتم تعيينها ( تنظيمها ) من حيث الزمن والكميه من قبل النظام نفسه . هذا يحتل مكاناً في مثل بندول الساعة الذي سبقت الاشاره اليه ،كذلك في مايسمى الانظمه الاتوماتيكيه الاخرى .

3 . في الانظمه الخطيه تحدث الذبذبات الاضطراريه بتأثير القوى التوافقيه المثيره ،تحدث هذه الذبذبات بتردد أو بدور القوه المثيره . في الانظمه اللاخطيه يمكن أن تحدث الذبذبات الاضطراريه بتأثير القوه المثيره الهرمونيه . تحدث هذه الذبذبات ليس فقط بنفس دور القوه المثيره ( نفس زمن ذبذبة الاثاره الهرمونيه الخارجيه) ،بل بأزمان ذبذبة ،تساوي اعداد كامله لمضاعفات مكرره لتردد الاثاره الخارجيه . بالارتباط مع

ذلك ، في النظام اللاخطي المبحوث بدرجة حريه واحده ، الذي تؤثر عليه فقط قوه مثيره توافقيه واحده ، يمكن ان تحصل في هذا النظام بعض النغمات الرنينيّه .

4 . في الانظمه الخطيه لاتعتمد الترددات الخاصه على الظروف الابتدائيه ، و في الغالب لاتعتمد هذه الترددات على السعه . تغيير تردد الذبذبات الخطيه ممكن فقط عن طريق التغيير الجوهري لبناء النظام ، ولتوزيع الكتله والمرونه فيه . في الانظمه اللاخطيه يعتمد التردد بصوره أكبر على سعة الذبذبه .

هذا الاعتماد يمتلك مكاناً بشكل رئيسي في الأنظمه اللاخطيه المحافظه . مثل هذه الانظمه تُظهر مجاميع كامله من الحركات الاهتزازيه الدوريه ذات الترددات المتغيره بأستمرار والمحصّلهْ من التغيير المستمر للظروف الابتدائيه .

## §2 . طريقة ايزوكلين او الانحناء IZOKLINO

في التحليل اللاحق لنظرية الذبذبات اللاخطيه سوف نتحدد بشكل رئيسي بالانظمه ذات درجة الحريه الواحده ، مع الاشاره الى الخطوط العامه لبعض طرق النظريه العامه للانظمه اللاخطيه ذات درجات الحريه الكثيره ، في هذا البند سوف ندرس بصوره خاصه الانظمه اللاخطيه البسيطه بدرجة حريه واحده ، موحدين دراسة هذه الانظمه بطريقة المستوي الطوري العامه او طريقة ايزوكلين . هذه احدى الطرق البيانيه لتكامل المعادلات التفاضليه من النوع

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) ,$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y) .$$

كما هو معروف لدينا ، هذه المعادلات تحدد المجال المستقر للاتجاه ، شاملة كل نقطة لهذا المجال باتجاه مماسي للمسار الطوري المار خلاله الخطوط الماره عبر النقاط ذات الانحرافات المماسيه المتكافئه تسمى ايزوكلين او انحناءات

الانحنات بالنسبة للمسارات الطوريه للنوع المبحوث ستكون :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} = Const = k .$$

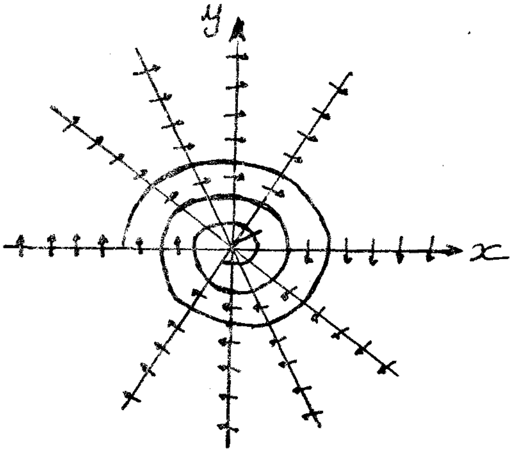
بتحديد سلسلة مقادير $k$ ، القريبه من بعضها البعض بمافيه الكفايه ، نحصل على مجموعة او عائلة التحناءات التي بمساعدتها يمكن ، إذا لم تبني بدقة المسارات الطوريه ، فإنه في كل الاحوال يمكن تصور ولو بشكل تقريبي الطبيعه العامه لترتيب هذه المسارات ، الامر الذي يصبح احياناً كافيا للحل النوعي للمسائل اللاخطيه . على الشكل 6.3 بني مجال الاتجاهات بالنسبة للمعادلات التاليه :

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -2by - k^2 x ,$$

اي للمذبذب الخطي المتخامد .

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0 .$$




شكل 3 . 6

من هذا الرسم يمكن في الحال ملاحظة ،
أن المسارات الطوريه تمتلك طبيعة حلزون
Spiral ، غير متطابق ذاهب الى أو
متحرك باتجاه البداية $O$ ، التي تصبح
بشكل ما ، نقطة خاصه من نوع البؤره .

## §3 . الانظمه اللاخطيه المحافظه بدرجة حريه واحده .

الانظمه اللاخطيه المحافظه تمثل نفسها حاله خاصه لصنف انظمة ليابونوف LEAPONOV

ودراستها تدخل في اطار الطرق العامه المبنيه لأنظمة ليابونوف ، لكن حالة الانظمه المحافظه بدرجة حريه واحده تسمح بتفسير هندسي هام لطبيعة تركيب هذه الانظمه ، ولذلك بدون الاعتماد على النظريه العامه لانظمه ليابونوف مبدئيا يصبح بحث هذه الحالة الخاصه يمتلك معنى ، اولا كمقدمه أوليه في نظريه الذبذبات اللاخطيه بشكل عام وثانيا كطريقة بسيطة للتعرف على النظريه الاساسيه النوعيه للانظمه اللاخطيه — للتعرف على طريقة المستوى الطوري .

معادلة الانظمه اللاخطيه المحافظه يمكن أن تعرض بهيئة

$$\ddot{X} + f(X) = 0 , \qquad (6 . 1)$$

حيث $f(x)$ يمكن ان تبحث كوحدة كتل لقوة الاستقامه (القوه التي تصبح بفضلها الذبذبات مستقامه). سوف نفترض ان الداله $f(X)$ يمكن تحليلها الى متسلسل بدرجات $X$ ، كما على سبيل المثال هذا يمتلك مكاناً في معادلة ذبذبة البندول الرياضي .

$$\ddot{X} + \frac{g}{L} \sin X = 0$$

حيث دور الداله $f(X)$ تلعبه الداله $\frac{g}{L}\sin X$ ،

المحلله في سلسله

$$\frac{g}{L}\sin X = \frac{g}{L}\left(X - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} - \cdots\right).$$

في المسائل البسيطه تعني الداله $f(X)$ ـ متعدد حدود من $X$ لدرجة غير عاليه ، اضافة الى ذلك ، وهذا ماينطبق على تعبير القوه المقومه ، ان متعدد الحدود هذا يغير اشارته عند تغيّر اشارة $X$.

المعادلة (6.1) تتكامل تربيعيا . في الغالب هي تمتلك التكامل الاول

$$\frac{\dot{X}^2}{2} + \int_0^X f(X)\,dX \quad .$$

تكامل حفظ الطاقة ، الذى نضعه بالصوره :

$$U(X) = \int_0^X f(X)\,dX \;,$$

سوف نكتب الشكل التالي :

$$\frac{\dot{X}^2}{2} + U(X) = h. \qquad (6.2)$$

الثابت $h$ يتحدد من الانحراف الابتدائي ومن السرعة الابتدائيه ، اى من الاحتياطي الابتدائي للطاقه الكامله .

على المستوي الطورى مع المعادلة (6.1) سوف

تتوافق معادلتين لحركة النقطه المصوّره :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \quad , \\ \frac{dy}{dt} &= -f(x) \, . \end{aligned}\right\} \qquad (6.3)$$

وخلال هذا يتحول التكامل الاول (6.2) في المعادله النهاية للمسارات الطوريه .

$$\frac{y^2}{2} + U(x) = h \, . \qquad (6.4)$$

بهذه المعادلات تُحل بصوره كاملة جميع الاسئله عن حركة النظام اللاخطي المبحوث ، وخاصة تلك الاسئلة المتعلقه بالحلول الدوريه ، تحققها واستقرارها . وبنفس الوقت نقدم بحثاً للحركات المحدده بالمعادلات (6.1) ، (6.3) و (6.4) كذلك بطريقة المستوي الطوري بالتصور المعروف سابقاً . الجزء الاكبر من الداله $f(x)$ - الخاصيه اللاخطيه للمرونه - تتحدد بيانياً . في هذه الحالة حتى الداله $U(x)$ توجد بالتكامل البياني . المنحني $Z=U(x)$ الذي يصور اعتماد الطاقه الكامنه على الانحراف $x$ ، سوف نسميه منحني التوازن الطاقي . لاحقاً ينبني هذا المنحني على نفس المستوي الطوري

الذى توزعت عليه المسارات الطوريه في نظام الاحداثيات ($X$، $Z$) ، حيث يتطابق محور $Z$ مع محور $y$ للمستوي الطورى ، بينما محور $X$ يوازى محور $OX$، للمستوي الطورى.
وبمساعدة منحني التوازن الطاقي من السهولة ان تبنى المسارات الطوريه للنظام المبحوث . بالانتقال الى وصف مثل هذه الابنيه ،نشير في البداية الى بعض الصفات العامه لهذه المسارات الناتجه من المعادلتين (6.3) و (6.4) .

1 )) المعادلة (6.4) لاتتغير عند تغيير اشارة $y$ ، بالتالي فان المسارات الطوريه للنظام (6.3) تصبح متماثله بالنسبه للمحور $OX$ .

2 )) نقاط المحور $OX$، التي يكون فيها في ان واحد

$$y = 0 \quad و \quad f(x) = 0 ،$$

اى ان نقاط المحور $OX$ مع الافق ،التي تساوى جذور المعادله $f(X) = 0$، تتفق مع حالة التوازن للنظام ،لان في هذه النقاط

$$\frac{dx}{dt} = 0 , \quad \frac{dy}{dt} = 0 .$$

هذه النقاط تظهر ايضا ،اضافة الى ذلك ، الصفات التاليه

$$U'(X) = 0 ,$$

اى ان الطاقة الكامنه تمتلك قيمه مستقره تبلغ في الغالب حدها الاعظم او الاصغر ،الامر الذى يحدد كما هو معروف طبيعة استقرار حالة التوازن الموافقه. في النهايه ، تصبح هذه النقاط ،نقاطا خصوصيه للمسارات الطوريه لان في هذه النقاط يصبح المعامل الزاوى

$$\frac{dy}{dX} = -\frac{f(X)}{y}$$

المماسي للمسار المار خلال هذه النقطه ، يصبح غير محدد .

3 )) في النقاط الاعتياديه يكون تقاطع المسارات الطوريه مع محور × 0 مماس للمسارات الطوريه العموديه على محور × 0 ، ذلك لان هنا وعند $f(x) = 0$ ، تكون $y$ مساويه للصفر ، وبالتالي

$$\frac{dy}{dx} = \infty .$$

عندما يكتسب النظام بعض اثارة ابتدائيه مع الاحتياطي الابتدائي لطاقته الكامله $h$ ، حينذاك يمكن بناء منحني التوازن الطاقي في النظام ( $Z, X$ ) منحني التوازن الطاقي

$$Z = U(X)$$

والمستقيم

$$Z = h .$$

اما الفرق

$$h - U(X)$$

فانه يحدد قيم الترتيب على الاحداثيات الديكارتيه بالاتجاه الشاقولي او مايسمى Ordinatus المسار الطورى وذلك بالمعادله التاليه :

$$\frac{y}{\sqrt{2}} = \pm\sqrt{h - U(X)} . \qquad (6.5)$$

هذه المقادير الشاقوليه الترتيب بالاحداثيات الديكارتيه تكون حقيقيه على الاجزاء ، حيث

$$h - U(X) \geq 0$$

وعلى الاجزاء ، حيث

$$h - U(X) < 0$$

تغيب المسارات الطوريه .

لغرض تبسيط البناء سوف نرتب على المستوي الطورى القيم الشاقولية الترتيب للمسارات الطوريه ، المتناقصه بـ $\sqrt{2}$ من الممرات ، مما لا يمكن القول اى شى عن هيئة المنحنيات ، بل فقط كونها تُقطّع على مقياس مقاييسها شاقوليا .

نبحث هيئة المسارات الطوريه ، التي تتوافق مع الاجزاء الانفراديه لمنحني التوازن الطاقي .

١ )) جزء منحني التوازن الطاقي ، حيث المنحني $Z=U(X)$ يقطع المستقيم $Z = h$ ( شكل 6.4 ) .

بالتوافق مع هذا يقطع المحور x 0 قَطْعٌ (او جزء ) المسار الطورى في النقطة الاعتيادية A ((1)) .

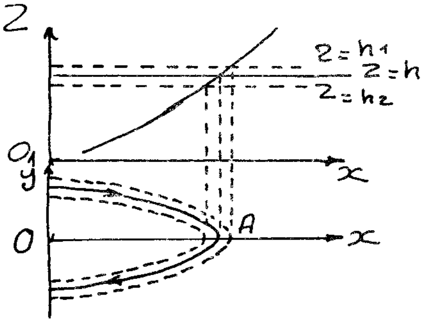
حيث يصبح المماس للمسار الطورى عموديا على محور x $OX$ . الى اليمين من النقطة A ليست هناك فروعاً حقيقية للمسار الطورى ، لان هنا

$$h - U(X) < 0 .$$

<u>حركة النقطه المصوّره على المسار الطورى تكون متجهه الى</u>

((1)) لان في هذه النقطه . $U'(X) = -f(X) \neq 0$

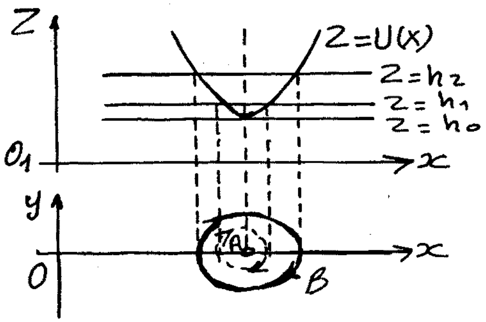
اعلى نصف المستوى من اليسار الى اليمين ، لانه هنا $y = \frac{dx}{dt} > 0$ ، بينما في الاسفل ـ من اليمين الى اليسار ، لانه عندما $y < 0$ ، فان $\frac{dx}{dt} < 0$ كذلك .




شكل 6.4

عند التغيير غير الكبير لمقادير $h$ ، لاتتغير الطبيعه العامه للمسار الطوري ، اي الخارطه النوعية تبقى كالسابق ( لاحظ الخطوط المنقطه على المستوى الطوري ( $X$ ، $y$ ) بالنسبة لـ $Z = h_1$ و $Z = h_2$ ) .

ب )) جـزءمنحـنـي الـتـوازن الطـاقي بقيـمة صـغرى واحـده منعزله ( لاحـظ الشـكل 6.5 ) .



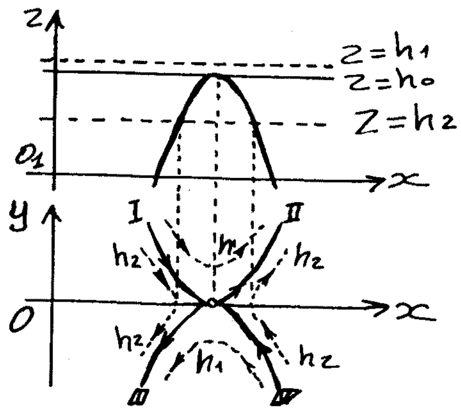

شـــكل 6.5

افـرض ان هـده القيمـه الصغـرى minimum تسـاوي $h_0$ .
اذا كـان المقـدار الابتـدائـي للطـاقـه الكـامله كذلـك $h_0$ ،فـان المسـار الطـوري ،المطـابـق لهـذه المينيموم ، ينشـطر فـي النقطـه الخـاصـه A علـى محـور OX ، الـذي يصـور حـالـة التـوازن للنظـام ،لانـه هنـا = 0 ،

$$y = 0 \quad و \quad U'(x) = f(x) = 0 \; .$$

المسـارات الطـوريـه عنـد $h$ ، اكبـر مـن $h_0$ ، ولكنهـا قـريبـه منهـا بمـا فيـه الكفـايـه ،هـده المسـارات تصـوّر منحنيـات مغلقـه ،تحيـط بالنقطـه A . النقطـه A تصبـح نقطـه خـاصـه مـن نـوع المـركـز للحـالة المصـوره ( حـالة التـوا زن المستـقره للنظـام ) .

حـ ) جزء منحني طاقة التوازن بقيمة عظمى منعزلة واحدة . القيمة العظمي ( $x$ ) $U$ المساوية لـ $h_0$ تتوافق كما نلاحظ من (الشكل 6.6) مع اربعة فروع للمسار الطوري متفرعة في نقطة $A$ (وتسمى بالشوارب) :




شكل 6.6

الفرعان $I$ و $II$ والمماثلين لهما $III$ و $IV$، يقسمان المستوى الطوري قرب النقطة $A$ الى اربعة اجزاء. عند المقادير $h > h_0$، فان المسارات الطورية سوف تقع في الاجزاء العليا و السفلى .

عند $h < h_0$، المسارات الطورية سوف تقع في الاجزاء اليسرى و اليمنى. عند وقوع النقطة

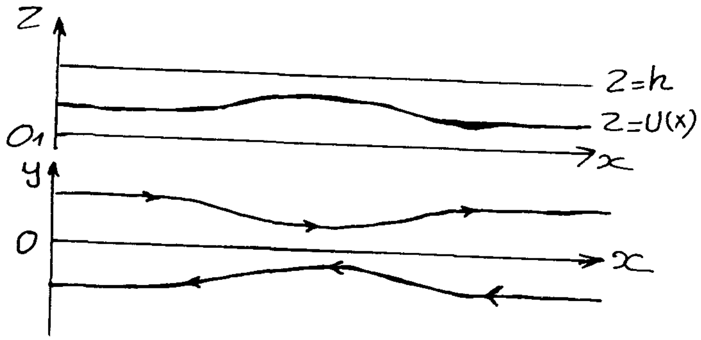
المصوره على واحد من هذه المسارات إما ضد ا الفرعين I و II ا فانها مع الزمن تبتعد عن النقطة A . في مثل هذا الترتيب تسمى المسارات الطوريه قرب النقطة الخاصه بالسرج Saddle . مع هذه النقطه تتوافق حالة التوازن غير المستقره النقطة المصوّره عند وقوعها على المسارات I و II فانها تقترب من A . لكن هذا لا يتناقض مع التأكيد بأن النقطة A تصور حالة التوازن غير المستقره . اولا —

نحن لا نستطيع في الحالة المبحوثه أن نشير الى المنطقه القريبه من A ، التي لو وقعت فيها النقطه المصوره فلا يمكنها أن تنتقل في حركتها الشاره اللاحقه الى ماوراء حدودها . إحتماليه البحث في الفرعين I و IV المسميان «بالشاربين» I و IV ، أي تحديد الظروف الابتدائيه ، التي تتطابق تماما مع وضع النقطه على الشوارب ا صغيره الى اللانهايه .

ثانيا : عند وقوع النقطه المصوره في بدايه اللحظه الزمنيه على واحد من «الشاربين» I و II ، فانها لا تبلغ النقطه A في اي وقت من الاوقات ، لان ذلك سوف يتطلب فاصل زمني لا نهائي .

ج) المسارات الراكضه . اذا المستقيم $Z=h$ لا يقطع في أي مكان منحني التوازن الطاقي $Z=U(X)$ ولا يتماس معه في اية نقطة واذا وقع خلال ذلك ، المستقيم $Z=h$ تحت المنحني $Z=U(X)$ ، فان حركة النظام لا تتحقق .

اذا المنحني $Z=U(x)$ يقع بكل نقاطه تحت المستقيم $Z=h$ ، فان المسار الطورى سوف يتكون من فرعين متماثلين بالنسبة للمحور $OX$ ، ذاهبين بكلا الجانبين الى اللانهايه ( لاحظ الشكل 6.7 ) .




شكل 6.7

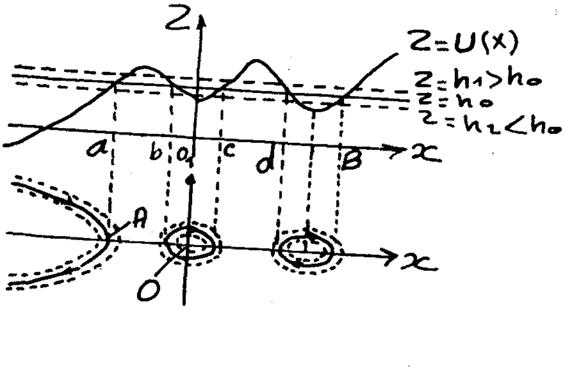
النقطه المصوّره سوف تتحرك بذلك المسار الذى لا يتوقف ، باتجاه واحد الى اللانهايه .

مثل هذه الحركه للنقطه المصوره تسمى بالحركة الراكضه ، اما المسارات الطوريه الموافقه فتسمى بالمسارات الراكضه .

د) المسارات الطوريه على كل المستوي الطوري .

في البدء نبحث الحالة ، عندما المستقيم $Z = h_0$ يقطع في بعض النقاط المنحني $Z = U(x)$ ، ولا يتماس معه في اي مكان ( شكل 6.8 ).

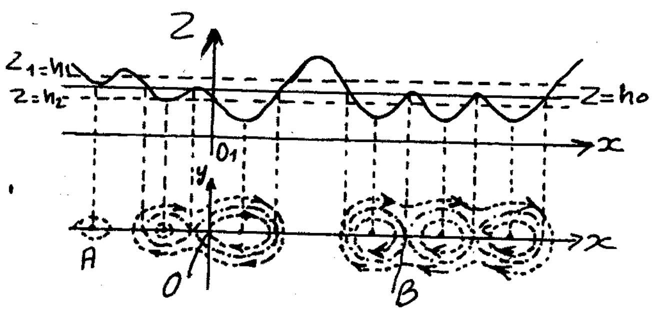
لمقادير $x$ تلك التي بالنسبة لها $U(x) > h_0$ ، تغيب المسارات الطوريه ( الاجزاء $ab$ و $cd$ ) ، على الاجزاء الاخرى عرضت المسارات الطوريه او المنحنيات المغلقه ( الاجزاء $bc$ و $de$ ) التي تصوّر الحركات الدوريه الممكنه في النظام ، أو الراكضه باتجاه واحد ، بهيئة تماثل الهيئه الموضحة على الشكل ( 6.4 ب ) عند النقطه $A$ على الشكل ( 6.8 ) . لمقادير $h$ ، القريبه الى $h_0$ ، لاتتغير طبيعة ترتيب المسارات الطوريه بصوره جوهريه .




شكل 6.8

لنفترض الآن ،أن المستقيم $Z = h_0$ يقطع المنحني $Z = U(x)$ ويتماس معه في بعض النقاط ( شكل 6.9 ) .

المسارات الطوريه في حالة واحده سوف تكون نقاطاً منعزله ، تتوافق مع القيم الصغرى للداله $U(x)$ ، التي تصور حالة التوازن المستقر للنظام ( النقطه A ) .




شكل 6.9

عند زيادة $h$ ،حول تلك النقطه ، مثل A ،تنتج مسارات مغلقه والتي تصور الحركه المنتظمه للنظام ( الحركه الدوريه ) .

في حالة أخرى،على الأجزاء النهائيه المنعزله سوف تتكون المسارات الطوريه المغلقه

التي تتوافق مع الحركه الدوريه ،او منحنيات مغلقه من نوع خاص ـ منحنيات بمقاطع عرضيه ذاتيه (في النقطتين B و C ) ـ التي تسمى فاصلات .

نقاط المقاطع العرضيه تتوافق مع القيم العظمى للطاقه وتصبح نقاطا خصوصية من نوع (السرج Saddle ) المصوره بحالات التوازن غير المستقر . هذه الفاصلات تجزىء مناطق المستوي الطورى الى مسارات طوريه للنوع . وهي بذاتها ليست منحنيات مصوره بحركات حقيقيه . الحركات الحقيقيه تنحرف دائما عن الفاصلات اما بجانب المسارات المغلقه ، المحصوره بداخل عقد الفاصلات او بجانب المسارات الراكضه ،واما بجانب المسارات المغلقه التي تضم في الحال بعضا من العقد المجاوره للفاصل . تصبح هذه الفاصلات فقط منحنيات حدوديه تفصل نوعي المسارات المشار اليهما ولذلك سموا بهذا الاسم ،اى ((العازلات)) .

كما يلاحظ من الشكل ( 6.9 ) ،النقاط الخصوصيه من نوع المركز والسرج تتبادل المواضع على المحور الديكارتي الافقي . هذا التبادل يصبح نتيجه بسيطه لتبادل القيم العظمى والصغرى للداله U(X) . زيادة على ذلك ،داخل المسارات الطوريه المغلقه توجد دائما اعداد غير زوجيه للنقاط ،بالاضافة الى ان عدد المراكز في الوحدة اكبر من عدد السروج .

افرض على سبيل المثال، على المستوي الطوري يوجد مسار طوري مغلق واحد ، يتقاطع مع محور $0x$ في النقطتين $\alpha$ و $\beta$ . في هذه النقاط تؤول الداله $h - U(x)$ الى الصفر . بالتالي ، بين $\alpha$ و $\beta$ تقع على الاقل نقطة واحده (او عدداً فرديا من مثل هذه النقاط)، التي تؤول فيها $U'(x)$ الى الصفر.

من التصور الهندسي يتضح ، انه اذا كان داخل المنحني المغلق نقطةَ واحده ، لذلك فإنها ستكون بالضروره ((مركزاً)) يتوافق مع القيم الصغرى المنعزله للطاقه الكامنه .

## §4. الحركه الدوريه للانظمه اللاخطيه المحافظه .

المسارات الطوريه المغلقه ، التي تصور الحركه الدوريه او (( الذبذبات اللاخطيه ))
للانظمه المحافظه ، تشكل على المستوي الطوري بناءآت كامله ، مملوءه باجزاء نهائية ، اضافة الى ان المسارة الطوريه المغلقه الواحد يلتهم الاخر ، الذي لا يتقاطع معه ( المسارات كما لوانها رتيبت الواحد في الآخر ) . لذلك ، اذا تحقق في النظام المحافظ حركه دوريه واحده ، معنى ذلك انه يمكن ان تحصل بالتغيير المستمر للظروف الابتدائيه بحدود بعض المناطق المحدد ده مجموعه لانهائيه من هذه المسارات داخل النظام سعات وأزمان ( ادوار ) الذبذبات اللاخطيه للأنظمه المحافظه تعتمد على الظروف الابتدائيه ( على الابتدائيه $h_0$ ) . دور ذبذبة النظام يمكن أن يحسب بالشكل التالي : من المعادله

$$\frac{dx}{dt} = y$$

نجد ان

$$dt = \frac{dx}{dy} = \frac{dx}{\sqrt{2[h - U(x)]}}$$

اذا كان الجزء الديكارتي الافقي للقاط المقطع العرضي للمسار الطوري المغلق مع محور $x$ 0 يرمز لها خلال $\alpha$ و $\beta$ ( شكل 6.5 ) ، لذلك بالنسبة لـ $T$ لذبذبة كامله نجد التعبير .

$$T = 2\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{2[h - U(x)]}} \quad (6.6)$$

يجب ان نلاحظ ،أن الذبذبات الصغيره الحرة للنظام المحافظ الخطي كذلك تصوّر على المستوي الطوري بيناءآت للمسارات الطوريه المغلقه التي تحيط بنقطة وضع التوازن المستقر للنظام .

سعات ذبذبات الانظمه الخطيه حالها كحال الانظمه اللاخطيه المحافظه ،تعتمد على الظروف الابتدائيه ،لكن دور ذبذبه النظام الخطي تعني كميه ثابته لا تعتمد على الظروف الابتدائيه ولا على الاحتياطي الابتدائي لطاقة النظام، الامر الذي يمكن التأكد منه ، عند تعويض المقادير المطابقه لـ $U(x)$ و $h$ ،في المعادله (6.6).

بما أن أزمان ذبذبات النظام اللاخطي المحافظ المصوّره على المستوي الطوري بمسارات مغلقه ، ليست واحده ولا هي نفسها ،بل تعتمد على الظروف الابتدائيه ،لذلك فان نقطتين مصوّرتين ، ابتدأتا حركتيهما على سبيل المثال من المحور $OY$ ، بوقت واحد بمسارين متقاربين، مع مرور الزمن يبتعدان الواحده عن الاخرى على مسافة نهائيه، بنتيجة ذلك لا يمكن القول ، ان الحركات الدوريه للانظمه المحافظه تعتبر مستقره . لكن هذه الحركات تظهر مايسمى استقرارا مداريا ، معبرا عنه ، بكون أنه عند

التغيير الصغير للغايه للظروف الابتدائيه تنتقل حركة الاثاره الدوريه للنقاط المصوّره على مسارات اخرى قريبه الى أبعد حد من المسارات الابتدائيه ( غير المثاره ).

مثال 1 . ذبذبة بندول رياضي بسعة نهائيه ، نرمز لطول البندول عبر $\ell$ وعبر $\theta$ زاويه الانحراف عن الشاقول ، من قانون تغير زخم كمية الحركه نحصل المعادله :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0 .$$

معادلات حركة النقاط المصوّره على المستوي الطوري $OXY$ سوف تمتلك الهيئه

$$\frac{dx}{dt} = y ,$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{g}{\ell} \sin x ,$$

حيث

$$x = \theta , \quad y = \dot{\theta} .$$

هذه المعادلات تمتلك التكامل الاول

$$\frac{1}{2}y^2 - \frac{g}{\ell}\cos x = h$$

و

$$\frac{y^2}{2} - \frac{g}{\ell}(\cos x - \cos x_0) . \qquad (6.7)$$

حيث $x_0$ - الانحراف الابتدائي من الشاقول ، الداله $U(x)$ والثابت $h$ هنا يساويان :

$$U(x) = -\frac{g}{\ell}\cos x\,, \qquad h = -\frac{g}{\ell}\cos x_0\,.$$

معادلة المسارات الطوريه ،المثله بالتكامل (6.7) يمكن تحويلها الى مايلي :

$$\frac{y^2}{2} = \frac{2g}{\ell}\left(\sin^2\frac{x_0}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right). \qquad (6.8)$$

دور الذبذبه اللاطه T نجده من المعادله (6.6)، واضعين فيها

$$h = -\frac{g}{\ell}\cos x_0\,, \quad \alpha = -x_0\,, \quad \beta = x_0$$

$$U(x) = -\frac{g}{\ell}\cos x\,.$$

بما أن الداله تحت التكامل زوجيه ،لذلك

$$T = 2\int_0^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{\frac{g}{\ell}\left(\sin^2\frac{x_0}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)}}\,. \qquad (6.9)$$

تكامل الالبس هذا ، الذي يمتلك الاوضاع

$$\sin\frac{x}{2} = u\sin\frac{x_0}{2} = ku$$

يمكن ان يتحول الى الهيئه القياسيه

$$T = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}\,.$$

في النظريه الخطيه لذبذبة البندول، بأخذنا

$$\sin^2\frac{X_0}{2}\cong\frac{X_0^2}{4}\;,\;\sin^2\frac{X}{2}\approx\frac{X^2}{4}\;,$$

نحصل من المعادله (6.9) على التعبير العام المعروف بالنسبة للدور

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\;.$$

دور الذبذبات الخطيه لايعتمد على $X_0$ أي لا يعتمد على سعة الذبذبة ( أو الظروف الابتدائيه ).
في النظريه اللاخطيه يعتمد الدور بشكل جوهري على السعة . هذا الاعتماد يمكن أن يعبر عنه بصورة واضحه، بتعويض التكامل الالبسي في المعادله (6.9) بتحليله المعروف بالدرجات $k$ :

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2k^4+\cdots\right]$$

أو :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{x_0}{2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4\frac{x_0}{2}+ \right.$$
$$\left. + \cdots \right] \quad (6.10)$$

نتحدد بهذا التحليل بالحدين الأولين ونضع

$$\sin^2\frac{x_0}{2} \approx \frac{x_0^2}{4},$$

نحصل على معادلة دقيقه ومقربة للدور

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1+\frac{x_0^2}{16}\right).$$

تاثير هذا التدقيق ليس كبيرا جدا .

اذا كان $x_0 = 30^\circ$ ، لذلك نحصل من المعادله الاخيره

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1+0,014\right) = 1,014\,T_0 .$$

لكي نحصل على الخارطه الطوريه (شكل 6.10) .

لذبذبة البندول ، نبني ، طبقا للنظريه العامه على المستوي (X ، Z) منحني التوازن الطاقي

$$Z = -\frac{g}{\ell}\cos x .$$

هذا سيكون جيب تمام بقيم صغرى Minimum منفرد .

في النقاط:

$$x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$$

و بقيم عظمى maximum في النقاط :

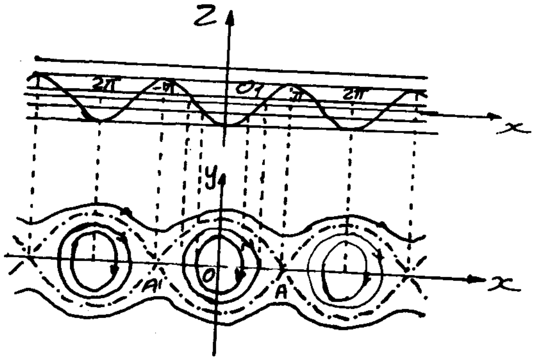
$$x = \pm\pi \,,\ \pm 3\pi \,, \ldots$$

الاحتياطي الابتدائي للطاقه الكامله يتحدد بالانحراف الابتدائي ويساوي

$$h_0 = -\frac{g}{l}\cos x_0 \,.$$

عندما $0 < |x_0| < \pi$ وبالتالي ، $|\cos x_0| < 1$ ،

و $|h_0| < \frac{g}{l}$ ، لذلك ينجز البندول ذبذبات دوريه مصوّره بمنحنيات مغلقه داخل عقد الفاصلات او الخطوط الانفصاليه أو المقاطع الانفصاليه .




شكل 5.10

هذه المنحنيات تحيط بالنقاط الخاصه ، التي تتوافق مع أوضاع التوازن المستقر للبندول .

المنحنيات المغلقه ، الموجوده داخل الجزء $(-\pi, +\pi)$ تحدد الخارطه الطوريه الكامله لحركة

البندول . العقد الاخرى تكرر ببساطه هذه الصوره،
لان مقادير $x$ التي تساوى :

$$x = 0 , \pm 2\pi , \pm 4\pi , \ldots$$

تتوافق مع نفس وضع التوازن المستقر الواحد
للبندول او النواس

عندما $h_0 > \frac{g}{l}$ ، هذا يمتلك مكاناً فقط ، اذا في
اللحظه الابتدائيه يكتسب البندول مع الانحراف $x_0$ ،
سرعة ابتدائيه $v_0$ كبيره الى ماغيه
الكفايه ، أي اذا :

$$h_0 = -\frac{g}{l}\cos x_0 + \frac{v_0^2}{2} ,$$

لذلك، فان الفرق

$$h_0 - U(x) = \frac{v^2}{2}$$

سوف يكون أكبر من صفر تحت شرط

$$\frac{v_0^2}{2} > \frac{g}{l}(1 + \cos x_0) ,$$

المسارات الطوريه التي تتوافق مع هذه الحاله
سوف لن تقطع المحور $OX$ ؛ هذه سوف تكون
مسارات راكضه .
سوف يدور البندول حول محور التعليق في
مستوي شاقولي كل الزمن بنفس الاتجاه الواحد .

عندما

$$h_0 = \frac{g}{l} , x_0 = \pm \pi , \pm 3\pi$$

$$h_0 - U(x) = \frac{g}{l}(1 + \cos x) ,$$

فإنه على المستوي الطوري يحصل المقطع المنفرد أ و الفاصل $A'A$ . كما أشير سابقا ، حركة النقطه المصوّره على الانفصالي او الفاصل عطيها غير ممكنه ، رغم أن ذلك ممكن نظريا . النقطه المصوره الواقعه على الانفصالي او الفاصل بقوة الاختيار الملائم للظروف الابتدائيه ، هذه النقطه المصوّره سوف تتحرك على المفاصل الى وضع التوازن غير المستقر ، لكن لاتبلغ في أي وقت من الاوقات وضع التوازن هذا . بنفس الوقت ، نفترض ، أن البندول الموجود ساكناً في وضع التوازن المستقر ( $X = 0$ ) ، يحصل على سرعة ابتدائيه ، كافيه لبلوغ وضع التوازن الشاقولي غير المستقر ( $X = \pi$ ) . الوقت الذي يلزم لاجل ذلك ربع زمن الذبذبه ، نجد باستخدام صيغة ، مماثله للعلاقه (9 . 6)

$$t\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{2}\int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\sin^2\frac{x_0}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}},$$

حيث الان $x_0 = \pi$

وبالتالي ،

$$t\sqrt{\frac{g}{l}} = \int_0^{\pi} \frac{d(\frac{x}{2})}{\cos\frac{x}{2}} = 2\lim_{x\to\pi} \ln tg\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right).$$

من العلاقه الاخيره يتضح ، انه عند اقتراب $X$ الى $\pi$ ، فان $t$ تنمو بدون حدود .

البندول ، الذي حصل على السرعه الابتدائيه التي تنبغي ، سوف يقترب الى وضع التوازن اللامستقر ، لكن لا يبلغه في أي وقت من الاوقات .

# اجهزه ومصطلحات

## اجوبة الفصل الاول

س4 —

$$x(t) = 0{,}1 \sin 0{,}5\pi t \ M.$$

س5 —

1) $x(t) = 50 \sin(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}) mm.$

2) $x_1(t) = 35{,}2 \ mm \ ; \quad x_2(t) = 0$

س6 —

$$x(t) = 5 \sin(5\pi t + \frac{\pi}{4}) \ Cm.$$

س8 —

$$t = \frac{1}{6}\pi$$

س9 — خلال (1) ثانيه واحده

س10 —

$$V_{max} = 7{,}85 \cdot 10^{-2} \ M/sec.$$

$$a_{max} = 12{,}3 \cdot 10^{-2} \ M/Sec^2.$$

س – 11

1) $4\ sec.$

2) $3,14 \cdot 10^{-2} M/sec.$

3) $4,93 \cdot 10^{-2} M/sec^2.$

س – 13

$v = 0,136\ M/sec.$

س – 14

$x(t) = 5 \cdot 10^{-2} \sin(\pi t + \frac{\pi}{6})\ M.$

س – 15

$A = 3,1 \cdot 10^{-2}\ M,$

$T = 4,1\ sec.$

س – 17

1) : $\frac{T}{U} = 3$

2) : $\frac{T}{U} = 1$

3) : $\frac{T}{U} = \frac{1}{3}$

س – 18

1) $\frac{T}{U} = 15$ ، 2) $\frac{T}{U} = 3$

3) $\frac{T}{U} = 0$

س 19 ـ

$$x(t) = 0{,}04 \sin(\pi t + \frac{\pi}{3})\ M.$$

س 21 ـ

$$0{,}78\ Sec.$$

س 22 ـ يقل الدور بمرتين .

س 23 ـ يقل الدور بـ 8 و 1 مره .

س 24 ـ لدينا $$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

او $$T_1^2 = 4\pi^2 \frac{m}{K}$$

بعد اضافة الثقل $\Delta m$ سوف نمتلك

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m+\Delta m}{K}} \quad (1$$

او

$$T_2^2 = 4\pi^2 \frac{m+\Delta m}{K} \quad (2$$

نطرح (1) من (2) نحصل

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2 \frac{\Delta m}{K}$$

لكن

$$K = \frac{F}{\Delta l} = \frac{\Delta m g}{\Delta l}$$

حيث $F$ — القوه التي تسبب الاستطاله

$$\Delta l = \frac{g}{4\pi^2}\left(T_2^2 - T_1^2\right) = 2,7 \cdot 10^{-2}\,M = 2,7\,Cm.$$

س 25 —

أ) $$x(t) = 3,7 \cdot 10^{-2} \sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{8}\right) M.$$

ب) $$A = 4,6 \cdot 10^{-2}\,M ; \quad \varphi = 62^\circ 46' .$$

س 26 — $$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{3}$$

س 27 —

1) $$A = 5\,Cm ; \qquad \varphi = 36^\circ 52' \cong 0,2\pi .$$

2) $$x(t) = 5 \sin(\pi t + 0,2\pi)\,Cm.$$

س 28 —

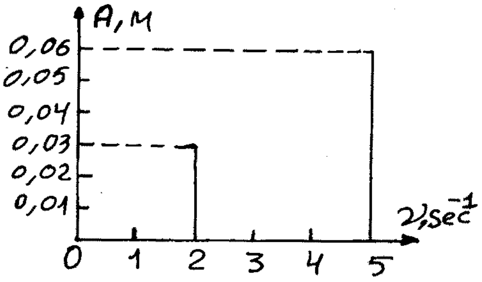
1) معادلات الاهتزازات ستكون بالصوره التاليه

$$x_1 = 0,03 \sin 0,4\pi t \; M ,$$

$$x_2 = 0,02 \sin \pi t \; M ,$$

$$x_3 = 0,01 \sin 2\pi t \; M .$$

س 29




س 30 — يمكن ان تحلل الذبذبه قيد البحث الى ثلاث ذبذبات توافقيه بترددات :

$\nu_1$ ، $(\nu_1 - \nu_2)$ و $(\nu_1 + \nu_2)$ ،

وبسعات $A_0$ ، $\frac{A_0}{2}$ و $\frac{A_0}{2}$ ايضاً.

س 31 — في حالة جمع ذبذبتين متعامدتين متكافئتا الدور ، تكون معادلة مسار الذبذبه المحصله بالهيئه التاليه

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (1)$$

بما ان لدينا $(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$ ، فان المعادله (1) تأخذ الصوره :

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2} = 0$$

او

$$\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0$$

من ذلك ينتج ان $y = \frac{A_1}{A_2}x$ ـ معادلة خط مستقيم . بهذا الشكل ، سوف تحدث محصلة الذبذبه بخط مستقيم .

اما زاوية انحراف المستقيم فيمكن ايجادها بالمعادله

$$tg\alpha = \frac{A_2}{A_1} = 0,5 \Rightarrow \alpha = 26^\circ 34'$$

دور الذبذبه المحصله يساوى دور الذبذبتين المجموعتين ، بينما سعتها

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 0,112\,M.$$

بالتالي ، معادله الذبذبه المحصله تمتلك الصوره

$$S = 0,112\,Sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{3}\right)M.$$

س 32 ـ

1) : $7\,Cm.$

2) : $5\,Cm.$

س 33 ـ معادلة مسار الحركه :

$$2y^2 - x = 1$$

وهـــي معـــادلـــة قطـــع نـــاقـــص

س 34 ـــ معـــادلـــة المســـار

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$$

وهـــي معـــادلـــه دائـــره بنصـــف قطـــر 2,0 متـــر

س 35 ـــ معـــادلـــة المســـار

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$$

وهـــي معـــادلـــة الجـــس

س 36 ـــ

$$y = -0{,}75x$$

وهـــي معـــادلـــة خـــط مســـتقيـــم .

## اجــوبــة الفـصـل الـثـانــي

س1 ـ

$$x(t) = Ae^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi),$$

2 ــ لبنـاء المنحـنـي ، نجـد اللحـظـات الـزمنيه $t_1$، $t_2$، ...

التـي تتـوافـق مـع القيـم العظمـى للازاحـه $x$ .

$$t_1 = 0,842\ sec; \quad t_2 = t_1 + \frac{T}{2} =$$

$$t_2 = 2,842\ sec..$$

$$t_3 = t_1 + T = 4,842\ sec.$$

$$t_4 = t_1 + \frac{3T}{2} = 6,842\ sec.$$

بعـدهـا نجـد $x_1$، $x_2$، $x_3$ ثـم نـرسـم المنحـنـي .

س2 ـ لاحـظ حـل السـؤال السـابـق .

س3 ـ

$$v_1 = 7,85\ M/sec, \quad v_2 = 2,88\ M/sec.$$

$$v_3 = 1,06\ M/sec, \quad v_4 = 0,39\ M/sec$$

$$v_5 = 0,14\ M/sec.$$

س4 ـ تـنـقص بـ 1,22 مـره .

س5 — $\lambda = 0{,}023$

س6 —

1) : $120 sec.$

2) : $1{,}22 \ sec.$

س7 — تنقص بـ 8 مرات .

س8 —

1) $\lambda = 0{,}46 \ sec^{-1}$

2) $\lambda = 10 \ sec^{-1}$

3) $\lambda = \frac{\beta}{T'} = \frac{\beta W_0^2}{\sqrt{4\pi^2 + \beta^2}}$

$= 6{,}9 \ sec^{-1}$

س9 — معادلة الذبذبات الخاصه تمتلك الهيئه

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin W_0 t$$

اما معادلة القوه المجبره فهي

$$F = F_0 \sin wt$$

$$F_0 = A m \sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + 4\beta^2 w^2}$$

بالتالي وبعد التعويض نجد

$$F = 7{,}2 \cdot 10^{-2} \sin 10\pi t \ N .$$

س[10] ـ سعة الاهتزازات $a$ تساوى

$$a = \frac{H w^2}{\sqrt{w_0^4 + w^4}}$$

س[11] ـ معادلة الحركه الاهتزازيه للجسم هي :

$$x(t) = \frac{F}{m(a^2 + w_0^2)} \cdot \left(e^{-at} + \frac{a}{w_0} \sin w_0 t - \cos w_0 t\right).$$

س[12] ـ الدور الذى يحصل عنده الرنين $T_{Res}$ يساوى

$$T_{Res} = \frac{2\pi}{w_{Res}} \cong \frac{1}{0,94} T_0 \cong 1,07\, T_0$$

$$\cong 1,07 \cdot 0,63$$

$$\cong 0,67\, Sec.$$

س[13] ـ معادلة حركة الثقل التفاضليه هي

$$y(t) = \frac{F(t)/m}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + 4\beta^2 w^2}} \cos(wt - \varphi)$$

نعوض عن $F(t)$ في كل حاله ومن ثم نجد $y$ المتوافقه معها ، على فرض ان $F(t)$ لكل حاله

تكــون متغــيــره تــوافقيــا •

س 14 ــ

1) معـــادلـــة الاهتـــزا زات الاضطـــرا ريـــه ( القســـريه) لمـــركـــز الكـــره B هـــي :

$$x(t) = A\cos(\omega t - \varphi) \quad ,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{4,3 \cdot 18,85}{447 - (18,85)^2} =$$

$$\varphi = 0,7217 \ rad .$$

$$x(t) = 24 \cdot 0,018 \cos(18,85t - 0,7217)$$

2) اكـــبر تمـــد د للنـــابـــض يســـاوى

$$ad = 0,15 \ Cm .$$

3) القيمـــه العـــظمـــى للقـــوه

$$F_{max} = C \cdot ad$$

حيـــث $C$ ــ معـــامـــل المـــرونـــه

$ad$ ــ الاســـتطـــالـــه

$$F_{max} = 120 \cdot 0,15 = 18 \ N$$

.( N ــ نيوتن )

س$\underline{15}$ المعادله التفاضليه لحركة النقطه الماديه في الشكل ( 2.21 ) هي:

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}_x + \vec{S}_x . \qquad (1)$$

حيث

$F_x$ — قوة المرونه وتساوى $F_x = -Cx$ ،

$S_x$ — القبوه المثيره ، نحصل عليها باستخدام مسلسل فوريه

$$S_x = \frac{4H}{\pi}\left(\sin wt + \frac{1}{3}\sin 3wt + \frac{1}{5}\sin 5wt + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{7}\sin 7wt\right)$$

نعوض عن $F_x$ ، و $S_x$ في المعادله (1) نجد

$$\ddot{x} + w_0^2 x = h\left(\sin wt + \frac{1}{3}\sin 3wt + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5}\sin 5wt + \frac{1}{7}\sin 7wt\right).$$

حيث

$$w_0^2 = \frac{C}{m} \quad ; \qquad h = \frac{4H}{\pi m}$$

## اجوبة الفصل الثالث

س1 ـ التوازن سوف يكون مستقرا عندما

1 ـ

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} > 0 \;;\; \sin\alpha < \cos\beta \,. \qquad (1)$$

أو

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) < \cos\beta \,. \qquad (2)$$

أو

$$\alpha + \beta < \frac{\pi}{2} \,. \qquad (3)$$

اذا تحقق الشرط (3) فذلك يعني ان $\beta$ تقع على يسار $\beta_0$ .

س2 ـ

$$C_2 > P_2 \ell_2 \,,$$

$$C_1 > (P_1 + P_2)\ell_1 + \frac{P_2 \ell_2 C_2}{C_2 - P_2 \ell_2} \,.$$

س3 ـ

$$i_2(t) = i_2(0)\, e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) =$$

$$= n \frac{\mathcal{E}}{R}\, e^{-\frac{n^2}{RC}} \cos(\omega t + \varphi)$$

حيث

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L_2 C} - \frac{n^4}{4RC}} \,.$$

## اجوبة الفصل الرابع

س$^{1}$ : الترددات الخاصه او الطبيعيه للاهتزازات

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}} \quad و \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m}}$$

بينما المتجهات الخاصه لأجل الاحداثيات الطبيعيه

$$K_1 \equiv \varkappa_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad \varkappa_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} .$$

س$^{2}$ ) الترددات الخاصه والمتجهات الخاصه

$$\omega_1^2 = 0 ; \quad K_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} ; \quad \omega_2 = n , \quad K_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} ,$$

$$\omega_3 = n\sqrt{3} , \quad K_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

س$^{3}$) الترددات الخاصه

$$\omega_1^2 = \frac{c}{m}\,\frac{1}{2\alpha} = \frac{c}{m}\left(3-\sqrt{3}\right) .$$

$$\omega_{2,3} = \frac{c}{m}\left(3 \mp \sqrt{3}\right) ; \quad \begin{Bmatrix} x_{13} \\ \varkappa_{23} \\ \varkappa_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix} A_{13} \cos(\omega_3 t + \varphi_3)$$

س$^{4}$) الترددات الخاصه المعقده $\lambda_1$ ، $\lambda_2$ و $\lambda_3$ تساوى

$$\lambda_1 = -\delta_1 + i\omega_1 , \qquad \lambda_3 = -\delta_2 + i\omega_2 ,$$

$$\lambda_2 = \lambda_1^{*} = -\delta_1 - i\omega_1 \qquad \lambda_4 = \lambda_3^{*} = -\delta_2 - i\omega_2$$

$$\delta_1 = \delta = \frac{R}{2L} , \qquad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cong \omega_0 ,$$

$$\delta_2 = 3\delta = \frac{3R}{2L} , \qquad \omega_2 = \sqrt{3\omega_0^2 - (3\delta)^2} \cong \omega_0\sqrt{3} ,$$

اما المتجهات الخاصه فتساوى

$$K_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} ; \quad K_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} ; \quad K_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} ; \quad K_4 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} .$$

# المصطلحات

"A"

Amplitude .................................. السعه

Angular memementum .................. العزم الحركي ( او الزاوى )

Angular frequency ................ التردد او التواتر الزاوى

Approximation ........................... تقريب

Asymptotic behaviour .................... السلوك المقارب

Average value ............................ القيمه الوسطى

Acceleration ............................. التسارع

Automatic oscilation ................... ذبذبات اتوماتيكيه

Antiphase ................................ طور مضاد

"B"

Basis .................................... قاعده

Boundary conditions ..................... الشروط الحديه

Parabula ................................. القطع الناقص

Beats .................................... الضربات او النبضات

"C"

Centre of mass ........................... مركز الكتله

Central force ............................ قوه مركزيه

Closed system ............................ نظام معزول او مغلق

Comnlet describtion ........................................ وصف كامل

Comnlex function ........................................ داله معقده

Conserved system ........................................ نظام محافظ

Conservation ........................................ انحفاظ

Conservation of energy ........................................ انحفاظ الطاقه

Conservation lows ........................................ قوانين الانحفاظ

Conservation of conditions ........................................ شروط الانحفاظ

Cartesion coordinates ........................................ الاحداثيات الديكارتيه

Circular hall........................................ الاخدود الحلقي

Canacity ........................................ السعه الكهربائيه

Comnlex numbers ........................................ الاعداد المعقده

Coil ........................................ ملف او وشيعه

Comnlex imnedence ........................................ المقاومه
العقديه او المركبه

Canacitive micronhone ........................................ الميكروفون السعاتي

" D"

Descrinted equation ........................................ المعادله الخصوصيه او المميزه

Disnlacement ../........................................ الازاحه

Degree of freedom ........................................ درجة الحريه

Damned oscilations ........................... اهتــزا زات متخامده

"Diomile" integration ......................... تكامل ديوميــل

"E"

Energy ........................................ طاقه

Equation of motion ............................ معادله الحركه

Enegy dispersion .............................. التشـــتت الطاقي

Electrical vibrations ......................... ذبــذبات كهربائيه

Elastic force ................................. قوة المرونه

Ellipse ....................................... البـــس ، قطع ناقص

Elastic coefficent ............................ معامل المرونه

Equilibrium position .......................... موضع التوازن

Electrical impedance .......................... الممانعه الكهربائيه

Electromechanical equivelence. ................ المماثله الكهـــروميكانيكيـــه

Electromechanical vibrations .................. اهتــزازات كهروميكــانيكيــه

Established vibrations ........................ ذبــذبات مســـتقامــه

"F"

Freemation ................................. حـركه حـره

Free oscillations ............................ اهتـزازات حره

Force oscillations ................. اهتـزازات اضطـراريـه اوقسـريـه

Force of reconstruction .......................... قوة الاعـاده

Forced forces ..................... القوى المجبـره او الاضطراريـه

Forrier series ......................... سـلسـلة فوريـيه

Functions .................................. دوال

Functions complex .......................... دوال معقده

" G "

General solution ............................ حـل عـام

Gradient............................ اشـتقاق او تفاضل جزئـي تدرجـي

Generator .................................. مـولـد

Genera or alternation current .................. مـولد تيار متغير

" H "

Hormonic oscillat or ....................... الـهزاز التوافقـي

Hormonic oscillations;;;;;;;..................... اهتـزازات توافقيـه

Hormonics ................................ توافقيـات

"H"

Hormonic force ........................................ قوه توافقيـه

Horizontal line ........................................ خـط مستقيم

Horizontal plane........................................ مستوى افقـي

Horizontal component ........................................ مركبـه افقيـه

"I"

Infinite ........................................ غيـر منتهـي

Infinite simall transformations ........................................ تحويلات غير متناهيا في الصـغر

Intensity ........................................ الشـده

Initial phase ........................................ الطور الابتـدائي

Initial conditions........................................ الشـروط الابتـدائيه

Induced electromotive force . ........................................ القوه الكهربائيـه المحتثـه

.................................".J ".................................

"K"

Kirchoff's low ........................................ قانون كرشـوف

"L"

Lagrange's equation ........................................ معادلة لاغرانج

Lanlacian ........................................ اللابـلاسـيان

Laplace transformations .............................. تحويلات لبلاس

Linear systems .................................... انظمه خطيه

Logarithmic decreament. المحدد اللوغاريتمي للخمود او للذبذبه amplitude.

" M "

Matrix representation ............................. التمثيل المصفوفي

Maximum value ..................................... القيمه العظمى

Minimum value ..........................?.......... زخم او دفع

Mechanical vibrations ............................. اهتزازات ميكانيكيه

Mechanical impédence .............................. الممانعه الميكانيكيه

" N "

Normal conditions ................................. ظروف طبيعيه

N degree of freedom ............................... N درجة حريه

Non linear system ................................. نظام لاخطي

One dimensional motion ........................ حركه في بعد واحد

Orthogonal vibrations ........................ ذبذبات متعامده

Oscillator ........................ هزاز

Outphase ........................ خارج الطور

"P"

Principle of superposition ........................ مبدا التراكب

Period ........................ زمن الذبذبه او الدور

Perpendicular vibrations ........................ ذبذبات متعامده

PERIODIC ........................ دوري

Pendulum ........................ البندول او النواس

Periodical motion ........................ حركه دوريه

Periodical vibrations ........................ ذبذبات دوريه

Phase ........................ الطور

Position ........................ موضع

Potential energy ........................ طاقه كامنه

Potential ........................ جهد او كمون

Piezoelectric ........................ الكهرو اجهاديه

Phase angle ........................ زاوية الطور

"Q"

Quality factor ................................ جـودة النظام

Quartz ........................................ الكـوارتز

"R"

Radial ........................................ قطـرى

Representation ................................ تمثيـل

Rotation ...................................... دورا ن

Resultant amplitude ........................... محصـلة السـعه

"S"

Superposition ................................. تـركيب او تراكب

Symmetry ...................................... تناظـر

System ........................................ نظام او جملـه

Small oscilations ............................. ذبـذبات صغيـره

Inphase ....................................... فـي الطـور

"T"

Time - dependent .............................. تابع للزمـن

Time - independent ............................ مسـتقل عـن الزمن

Total angular momentum ........................ العزم الحركي الكلـي

Total mass .................................... الكتلـه الكليـه

Transformation ................................ تحويل

Transducer .................................... مبـدل

Vibrations in naralel nlanes .......... ذبذبات باتجاه متكافئ

Velocity ........................................ السرعه

Vibrational motion ......................... حركه اهتزازيه

## المراجع الرئيسيه للكتاب


1)) م . ى . رابينوفيج و د . ى . تروبيتسيكوف
مقدمه في نظرية الاهتزازات والأمواج
دار العلم موسكو 1984

2)) ف.ت . غرينجينكو و ف . ف . ميليشكو
الذبذبات والأمواج في الأجسام المرنه
كييف دار العلوم (( دومكه )) 1981

3)) ى . ف . سافيليف
سلسله محاضرات في الفيزياء العامه
الجزء الاول . دار مير للنشر موسكو 1977

4)) ف . ف . بيتكيفج
الميكانيك النظرى
دار مير للنشر موسكو 1981

5)) ى . م . باباكوف
نظرية الاهتزازات
دار مير للنشر موسكو 1965

6)) ف . افدوكيموف
اسس الكهربائيه
دار مير للنشر موسكو 1977

7)) م . ي . آيزرمان
الميكانيك الكلاسيكي
دار مير للنشر موسكو 1980

8)) ل . ف . بوست نيكوفا و ي . ف.ي . كاروليفا
مسائل في النظريه الاهتزازيه
دار مير للنشر موسكو 1978

9)) أ . ي . ايرودوف
مسائل في الفيزياء العامه
دار مير للنشر موسكو 1981

10)) ف .أ. بلاش
مسائل في الفيزياء وطرق حلها
دار مير للنشر موسكو 1983

11)) ف . س . فولكينشتاين
مسائل في الفيزياء العامه
دار مير للنشر موسكو 1976

12)) ف .ب . كانديدوف وآخرون
حلول وتحليل مسائل النظريه الخطيه للاهتزازات
اصدار جامعة موسكو 1976

13)) ف . غ . زوبوف و ف . ب . شالنوف
مسائل في الفيزياء
دار مير للنشر موسكو 1972

14)) ا . ي . بوتيكوف وآخرون
الفيزياء في الأمثله والمسائل
دار مير للنشر موسكو 1979

15)) تشارلز كيتيل وآخرون
مقرر بيركلي في الفيزياء الميكانيكا
المجلد الأول ماكروهل 1982

## الفهرست